

Das Stabilitätsverhalten der Zellularkonvektion bei endlicher Amplitude

von

FRIEDRICH BUSSE

München 1962

Das Stabilitätsverhalten der Zellularkonvektion
bei endlicher Amplitude

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt

von

Friedrich Busse

Juni 1962



Referent: Prof. Dr. A. Schlüter

Korreferent: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Juli 1962

I n h a l t

	Seite
Einleitung	1
Die Grundgleichungen der Zellularkonvektion	
a) Aufstellung der Grundgleichungen	3
b) Randbedingungen	6
c) Umformung und Entwicklung der Grundgleichungen	7
Das Gleichungssystem ohne Temperaturkoeffizienten	
a) Die Lösung in der Ordnung $(\varepsilon^1 \zeta^0)$	13
b) Die Lösung in der Ordnung $(\varepsilon^2 \zeta^0)$	16
c) Die Lösbarkeitsbedingungen in der Ordnung $(\varepsilon^3 \zeta^0)$	18
d) Die Lösbarkeitsbedingungen in der Ordnung $(\varepsilon^4 \zeta^0)$	25
Das Gleichungssystem mit Temperaturkoeffizienten	
a) Die Lösung in der Ordnung $(\varepsilon^1 \zeta^1)$	27
b) Die Lösbarkeitsbedingungen in der Ordnung $(\varepsilon^2 \zeta^1)$	28
c) Die Lösbarkeitsbedingungen in der Ordnung $(\varepsilon^1 \zeta^2)$	33
Die stabilen Strömungsformen	
a) Berechnung der Anwachsraten	35
b) Die Zellengröße der stabilen Strömungsformen	43
c) Vergleich mit dem Experiment	47
Die Ableitung der Stabilitätsaussagen aus einem Extremalprinzip	
	51
Zellularkonvektion bei allgemeineren Randbedingungen	54
Anhang	55
Zusammenfassung	60
Literatur	61



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555208_0082

E i n l e i t u n g

Nimmt in einer ebenen Flüssigkeits- oder Gasschicht die Dichte auf Grund eines Temperaturgradienten entgegengesetzt zur Schwerkraft zu, so wird die statische Schichtung instabil, wenn der Temperaturgradient einen kritischen Wert überschreitet. Eine Konvektion setzt ein und bildet sich zu einer stationären Strömung aus, die manchmal walzenförmig, im allgemeinen aber in wabenartig angeordneten Zellen verläuft und daher Zellularkonvektion genannt wird. Der kritische Temperaturgradient ist gegeben durch einen bestimmten, zuerst von Lord Rayleigh berechneten Wert der Rayleighzahl

$$R = \frac{\alpha g c \varrho d^4 \beta}{\lambda \nu}$$

(α ist der Temperaturkoeffizient der Dichte ϱ , g die Erdbeschleunigung, d die Schichthöhe, β der Betrag des Temperaturgradienten, λ die Wärmeleitfähigkeit, C die spezifische Wärme und ν die kinematische Viskosität).

Zur Beschreibung der Zellularkonvektion gehen wir von den hydrodynamischen Grundgleichungen aus und berücksichtigen die Temperaturabhängigkeit aller vorkommenden Materialeigenschaften, wie Dichte, spezifische Wärme, Viskosität und Wärmeleitfähigkeit. Dieses allgemeine Vorgehen ist, wie gezeigt wird, notwendig zur Erklärung der zuerst von Benard [1] beobachteten Strömungszellen mit sechseckigem Querschnitt. In den bisherigen Arbeiten *) über das Problem der Zellularkonvektion ist dies nicht gelungen, da nur die Temperaturabhängigkeit der Dichte berücksichtigt wurde und auch diese nur in dem Glied, welches die thermische Instabilität hervorruft. Nach der Aufstellung der Grundgleichungen behandeln wir zunächst den statischen Fall ohne Konvektion, um dann in den Gleichungen die Temperatur durch die durch Konvektion her-

*) Eine zusammenfassende Darstellung der Theorie der Zellularkonvektion geben Pellew & Southwell [2]. Unter den neueren Arbeiten sind vor allem Malkus & Veronis [4] und Lortz [8] zu nennen.

vorgerufene Temperaturänderung zu ersetzen. Für kleine Strömungsamplituden ε und für kleine Werte des Temperaturkoeffizienten ζ , den wir als gemeinsamen Parameter der Temperaturabhängigkeit der genannten Materialeigenschaften einführen, versuchen wir das Gleichungssystem der stationären Strömung zu lösen, indem wir eine Potenzreihenentwicklung nach den beiden Parametern ε und ζ einführen. Die Lösung des Gleichungssystems in der niedrigsten, zu $\varepsilon^1 \zeta^0$ proportionalen Ordnung ergibt eine unendlich große Mannigfaltigkeit von Strömungsformen, die durch die Lösbarkeitsbedingungen der Gleichungen höherer Ordnung eingeschränkt wird. Um aus der dann immer noch unendlich großen Zahl die physikalisch realisierte stabile Strömungsform herauszufinden, überlagern wir in der gleichen Weise wie Lortz [8] den stationären Lösungen infinitesimale Störungen mit exponentieller Zeitabhängigkeit und untersuchen ihre Anwachsrate, indem wir die Gleichungen der instationären Störung, ganz analog zum stationären Gleichungssystem nach Potenzen der Parameter ε und ζ entwickeln.

Die Inhomogenität der Materialeigenschaften führt dazu, daß bei hinreichend kleinen Amplituden die experimentell beobachtete, sechseckige Zellen ausbildende Strömungsform die einzige nicht instabile Lösung darstellt. Bei höheren Amplituden wird sie unter symmetrischen Randbedingungen durch die walzenförmige Konvektion abgelöst. Im Fall der nicht symmetrischen Randbedingungen ist die sechseckige Zellen ausbildende Strömung dagegen auch bei größeren Amplituden stabil. Bei der Diskussion der mathematischen Ergebnisse erhalten wir weitere mit dem Experiment vergleichbare Aussagen und können z.B. die entgegengesetzte Strömungsrichtung in den Sechseckzellen bei Flüssigkeiten und Gasen erklären. Zum Schluß versuchen wir durch die Ableitung der Stabilitätskriterien aus einem Extremalprinzip den Einfluß physikalischer Größen wie z.B. des Wärmetransportes auf die Stabilität einer Strömungsform zu klären.

Die Grundgleichungen der Zellularkonvektion

a) Aufstellung der Grundgleichungen

Zur Beschreibung der Konvektionsströmung gehen wir aus von Erhaltungssätzen für Impuls, Masse und Energie. Durch die Angabe der Randbedingungen und der thermischen Zustandsgleichung wird dann das Problem vollständig beschrieben. Der Erhaltung des Impulses entsprechen die Bewegungsgleichungen von Navier-Stokes:

$$(1) \quad \varrho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \varrho u_j \partial_j u_i = -\partial_i p - \varrho g \lambda_i + \partial_j [\nu \varrho (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \delta_{ij} \bar{\nu} \varrho \partial_k u_k]$$

Die Indizes laufen über die Koordinaten x, y in der Schichtebene und z senkrecht dazu entgegengesetzt zur Schwerkraft. Der Einheitsvektor λ_i hat daher die Komponenten $(0, 0, 1)$. Über das Produkt gleich indizierter Größen ist zu summieren. Die kinematische Viskosität ν und die Volumenviskosität $\bar{\nu}$ sind voneinander unabhängig, da angenommen wird, daß der Druck p als thermodynamische Größe durch die Zustandsgleichung $p = p(T, \varrho)$ bestimmt ist und die Normalspannung nicht enthält.

Die Erhaltung der Masse führt zur Kontinuitätsgleichung:

$$(2) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \partial_j \varrho u_j = 0$$

Der Energiesatz lautet bei Vernachlässigung der Wärmestrahlung:

$$(3) \quad \varrho \frac{de}{dt} + p \varrho \frac{ds^{-1}}{dt} = \partial_j (\lambda \partial_j T) + \Phi$$

Dabei ist die Dissipation $\Phi = \partial_j u_i \cdot [\nu \varrho (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \delta_{ij} \bar{\nu} \varrho \partial_k u_k]$

T ist die Temperatur und e die innere Energie pro Masse.

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \partial_j$ ist die substantielle Ableitung nach der Zeit. Auf der linken Seite der Gleichung (3) steht die mit der Temperatur T multiplizierte Änderung der Entropiedichte S

$$(4) \quad \varrho \frac{de}{dt} + p \varrho \frac{ds^{-1}}{dt} = \varrho T \frac{ds}{dt} = \varrho c \frac{dT}{dt} - \varrho \left(\frac{\partial \varrho^{-1}}{\partial T} \right)_p T \frac{dp}{dt}$$

wobei $c = c(p, T)$ die spezifische Wärme bei konstantem Druck ist.

Bei Flüssigkeiten ist die Druckabhängigkeit der Entropie und der Materialeigenschaften sehr klein und kann gegenüber der Temperaturabhängigkeit vernachlässigt werden. Wir wollen die Druckabhängigkeit auch bei Gasen vernachlässigen und müssen dazu den Grenzfall betrachten, in dem das Verhältnis von Druckabhängigkeit zu Temperaturabhängigkeit verschwindet. Führt man die Druck- und Temperaturdifferenz zwischen den Grenzebenen der Konvektionsschicht ein

$$\Delta p = \varrho_0 g d, \quad \Delta T = T_1 - T_2$$

so darf man annehmen, daß die relativen Änderungen von Druck und Temperatur

$$\frac{dp'}{dt} = \frac{1}{\Delta p} \frac{dp}{dt}, \quad \frac{dT'}{dt} = \frac{1}{\Delta T} \frac{dT}{dt}$$

von gleicher Größenordnung sind. Der Grenzfall ist dann dadurch definiert, daß das Verhältnis der Koeffizienten, mit denen beide Größen in der Gleichung (4) vorkommen, verschwindet. Ersetzen wir

$\vartheta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial T} \right)_p T$ durch den Wert 1, der für das ideale Gas angenommen wird, und die spezifische Wärme c durch ihren Mittelwert c_0 , so erhalten wir:

$$(5) \quad \frac{g d}{(T_1 - T_2) c_0} \rightarrow 0$$

Dieser Grenzübergang soll bei konstanter Rayleighzahl R erfolgen, die, wie wir sehen werden, der für das Problem der Zellularkonvektion maßgebende Parameter ist. Aus der Zustandsgleichung des idealen Gases $\vartheta^{-1} dp + p d\vartheta^{-1} = (c_p - c_v) dT$ ergibt sich, daß in dem Grenzfall (5) auch die Druckabhängigkeit der Dichteänderung verschwindet. Die Viskositäten $\vartheta \nu$ und $\vartheta \bar{\nu}$, die spezifische Wärme c und die Wärmeleitfähigkeit λ nehmen wir ebenfalls als druckunabhängig an, was für ein ideales Gas exakt erfüllt ist, und erhalten für die Materialeigenschaften folgende Gleichungen, wenn wir nach Potenzen der Differenz zur mittleren Temperatur T_0 der Schicht entwickeln:

$$\begin{aligned}
 \varrho &= \varrho_0 (1 - \alpha (T - T_0) - \alpha \delta (T - T_0)^2 + \dots) \\
 \nu &= \nu_0 (1 + \gamma (T - T_0) + \dots) \\
 \lambda &= \lambda_0 (1 + \eta (T - T_0) + \dots) \\
 \bar{\nu} &= \bar{\nu}_0 (1 + \bar{\gamma} (T - T_0) + \dots) \\
 c &= c_0 (1 + \kappa (T - T_0) + \dots)
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Multipliziert man die Bewegungsgleichungen (1) mit u_i und ersetzt die Kontinuitätsgleichung näherungsweise durch $\partial_j u_j = 0$, so erhält man im stationären Fall bei Addition der drei Gleichungen und Mittelung über das Volumen der Konvektionsschicht, die wir durch Klammern mit dem Index m kennzeichnen

$$(\Phi)_m = \varrho_0 \alpha g d \left(\frac{T - T_0}{\alpha} u_z \right)_m + \dots$$

Auf der rechten Seite sind Glieder mit höheren Temperaturkoeffizienten als Faktor durch Punkte ... angedeutet, während die übrigen Integrale in verschwindende Oberflächenintegrale umgeformt werden können, weil die Strömung nur in der Schicht verlaufen soll. Da die Größenordnung des quadratischen Ausdrucks Φ bei der Mittelung nicht geändert wird, können wir diese Beziehung benutzen, um zu zeigen, daß die Dissipation Φ in der Gleichung (3) im Grenzfall (5) ebenfalls verschwindet. Setzt man nämlich die Beziehung (4) in die Gleichung (3) ein, so erhält man auf der rechten Seite im stationären Fall den Term $c \varrho u_j \partial_j (T - T_0)$, der von der gleichen Größenordnung wie $c \varrho \frac{T - T_0}{\alpha} u_z$ ist. Gegenüber diesem Term ist aber Φ im Grenzfall (5) zu vernachlässigen, da $\alpha (T_1 - T_2)$ die Größenordnung 1 nicht überschreitet.

Die physikalische Bedeutung des Grenzfalls (5) ist, daß die Energie, die ein Massenteilchen durch die Arbeit der Schwerkraft gewinnt, gegenüber der Energie vernachlässigt wird, die es durch Erwärmung erhält, wenn es die Konvektionsschicht durchläuft. Bei allen Experimenten zur Zellularkonvektion ist die Größe (5) sehr klein, so daß man erwarten kann, daß der hier betrachtete Grenzfall eine hinreichende Beschreibung der Experimente ergibt. Bei den geo- und astrophysikalischen Anwendungen der Zellularkonvek-

tion wird der Grenzfall (5) nicht angenähert. Statt vom Temperaturgradienten hängt das Instabilwerden der statischen Schichtung ab vom Überschuß über den adiabatischen Temperaturgradienten, der durch das Nullsetzen der Gleichung (4) bestimmt wird.

b) Randbedingungen

Die unendlich ausgestreckt gedachte Konvektionsschicht wird durch zwei Ebenen bei $Z = -\frac{1}{2}d$ und bei $Z = +\frac{1}{2}d$ begrenzt, auf denen die Temperaturen T_1 und T_2 ($T_2 < T_1$) vorgegeben sind. Die durch Konvektion eintretende Temperaturänderung verschwindet also auf den Grenzebenen und nur die durch die Schichtdicke dividierte Temperaturdifferenz $\beta = \frac{T_1 - T_2}{d}$ wird als äußerer Parameter in den Gleichungen erscheinen. Auf Seite 54 werden wir allgemeinere Randbedingungen diskutieren.

Bei den Randbedingungen für den Geschwindigkeitsvektor muß man unterscheiden, ob die Grenzebenen fest oder frei sind, d.h. ob die Strömung an ihnen haftet oder nicht. Im Fall der festen Grenzebene verschwindet u_i . Im Fall der freien Grenzebene verschwindet nur die Normalkomponente der Geschwindigkeit, aber es dürfen keine Schubspannungen auftreten. Daraus folgt $u_z = 0, \partial_z u_x = 0, \partial_z u_y = 0$. Mit den beiden möglichen Randbedingungen an der unteren und an der oberen Grenzebene erhält man vier verschiedene Fälle, die wir kurz Fall "frei-frei", Fall "fest-fest", Fall "fest-frei" und Fall "frei-fest" nennen werden. Da wir später den Impulsvektor $V_i = \varrho u_i$ statt des Geschwindigkeitsvektors einführen und die Divergenzfreiheit $\partial_i V_i = 0$ benutzen werden, bringen wir die Randbedingungen noch auf eine andere Form. An der festen Grenzebene gilt $V_i = 0$ und mit der Divergenzfreiheit folgt:

$$(7) \quad V_z = 0, \quad \partial_z V_z = 0$$

An der freien Grenzebene folgt aus $V_z = 0, \partial_z \frac{V_x}{\varrho} = 0, \partial_z \frac{V_y}{\varrho} = 0$ mit der Divergenzfreiheit:

$$(8) \quad V_z = 0, \quad \partial_z^2 V_z = \frac{\partial_z \varrho}{\varrho} \partial_z V_z - V_x \partial_x \frac{\partial_z \varrho}{\varrho} - V_y \partial_y \frac{\partial_z \varrho}{\varrho}$$

c) Umformung und Entwicklung der Grundgleichungen

Mit den Grundgleichungen versuchen wir das Problem der Zellularkonvektion in zwei Schritten zu lösen: (I) Wir suchen stationäre Lösungen der Grundgleichungen, deren Mannigfaltigkeit schon deshalb unendlich groß sein wird, weil wir in der Ebene der Schicht keine Randwerte vorgeben. (II) Aus dieser Mannigfaltigkeit von stationären Lösungen versuchen wir die physikalisch realisierten dadurch auszusondern, daß wir die Stabilität der Lösungen untersuchen, indem wir ihnen kleine Störungen überlagern. Die beiden Schritte werden jetzt erläutert:

I. Für die stationäre Strömung lautet die Kontinuitätsgleichung $\partial_j \varrho u_j = 0$. Es erweist sich als zweckmäßig, den Impulsvektor $v_i = \varrho u_i$ einzuführen und mit Hilfe der so erhaltenen Divergenzfreiheit $\partial_j v_j = 0$ die Bewegungsgleichung und den Energiesatz umzuformen. Diese lauten im stationären Fall:

$$(9) \quad v_i \partial_j \frac{v_i}{\varrho} = -\partial_i p - \varrho g \lambda_i + \partial_j \left[\nu (\partial_i v_j + \partial_j v_i) - \nu (v_j \frac{\partial_i \varrho}{\varrho} + \frac{\partial_j \varrho}{\varrho} v_i) - \delta_{ij} \bar{\nu} v_k \frac{\partial_k \varrho}{\varrho} \right]$$

$$(10) \quad c v_j \partial_j T = \partial_j (\lambda \partial_j T)$$

Im statischen Fall $v_i = 0$ reduziert sich die Gleichung (10) auf

$$(11) \quad \partial_j (\lambda \partial_j T_s) = 0$$

Setzt man hier die Temperaturabhängigkeit (6) von λ ein und berücksichtigt die Randbedingungen $T_s(-\frac{1}{2}d) = T_1$, $T_s(+\frac{1}{2}d) = T_2$ so erhält man durch zweimaliges Integrieren

$$T_s - T_0 + \frac{\eta}{2} (T_s - T_0)^2 = -\beta z + \frac{\eta}{2} \left(\beta \frac{d}{2} \right)^2$$

wobei die beiden Integrationskonstanten durch $\beta = \frac{T_1 - T_2}{d}$, $T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$ bestimmt sind. Da wir im folgenden die explizite Rechnung nur für Glieder mit linearem Temperaturkoeffizienten durchführen werden, berücksichtigen wir nur die in (6) hingeschriebenen linearen Glieder und berechnen nicht die Glieder von höherer Ordnung in η der Reihenentwicklung für die Temperaturverteilung im statischen Fall:

$$(12) \quad T_s - T_0 = -\beta z - \frac{\eta}{2} \beta^2 \left(z^2 - \frac{d^2}{4} \right) + \dots$$

Setzt man die hier durch bestimmte Temperaturabhängigkeit von im Term der Schwerkraft $\varrho g \lambda_i$ ein, so erkennt man, daß dieser Term sich als Gradient mit dem Druckgradienten zu einem einzigen Glied $\partial_i \pi$ zusammenfassen läßt und der statische Fall $v_i = 0$ mit $\pi = \text{const.}$ tatsächlich eine Lösung der Gleichung (10) ist. Wird die statische Schichtung instabil, indem eine Konvektionsströmung auftritt, so ändert sich die Temperaturverteilung, und wir können schreiben $T = T_s + \vartheta$, wobei ϑ klein gegen T_s ist, wenn die Strömungsamplitude hinreichend klein ist. Benutzt man die Entwicklung (12) für T_s , so läßt sich die Gleichung (10) als Gleichung in ϑ schreiben:

$$-c v_i \partial_i (\beta z + \frac{\eta}{2} \beta^2 z^2 + \dots) + c v_j \partial_j \vartheta = \partial_i (\lambda \partial_i \vartheta) + \partial_i (\lambda_0 \eta \vartheta \partial_i (-\beta z - \frac{\eta}{2} \beta^2 z^2 + \dots))$$

In dem Term der Schwerkraft führt die Abhängigkeit der Dichte von ϑ zu einem wesentlich neuen Glied, das sich nicht als Gradient schreiben läßt. Berücksichtigt man dagegen bei den anderen Termen die Temperaturabhängigkeit der Größen $\varrho, \nu, \bar{\nu}, \lambda, c$ durch die Gleichungen (6), so erhält man nur zusätzliche Glieder von ähnlicher Struktur und kleinerer Größenordnung. Die in ϑ und v_i quadratischen Glieder betrachten wir ebenfalls als Glieder von kleinerer Größenordnung, da wir die Zellularkonvektion für kleine Amplituden untersuchen wollen. Mit Hilfe der Definitionen

$$v'_i \equiv \frac{d c_0}{\lambda_0} v_i, \quad \vartheta' \equiv \frac{1}{\tau} \vartheta \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\tau} \equiv \frac{g \alpha \varrho_0 d^3 c_0}{\nu_0 \lambda_0}, \quad (x', y', z') \equiv \frac{1}{d} (x, y, z)$$

schreiben wir die Gleichungen dimensionslos und ordnen nach Gliedern verschiedener Größenordnung, indem wir die Strömungsamplitude mit dem Parameter ε bezeichnen und die Größenordnung der Temperaturkoeffizienten durch den gemeinsamen Parameter ξ kennzeichnen. Dann lauten die Gleichungen, wenn wir den Strich an den dimensionslosen Größen wieder weglassen und wenn wir $\rho_0 = \frac{\lambda_0}{c_0 \varrho_0 \nu_0}$, das Reziproke der Prandtlzahl, und die in der Einleitung erwähnte Rayleighzahl $R = \frac{1}{\tau} \beta d$ einführen:

Terme von der Größenordnung

ε

ε^2

$\varepsilon \zeta$

$\varepsilon^2 \zeta$

$\varepsilon \zeta^2$

$$\begin{aligned}
 \Delta v_i + \vartheta \lambda_i - \partial_i \pi &= \rho_0 v_j \partial_j v_i + \gamma R \tau (z \Delta v_i + \partial_z v_i + \partial_i v_z) - \gamma \tau (\vartheta \Delta v_i + \partial_j \vartheta (\partial_i v_j + \partial_j v_i)) + \gamma \eta \tau R^2 \partial_j v_i \\
 &+ \alpha R \tau \partial_z v_i \quad \quad \quad - \alpha \tau (v_j \partial_j \partial_i \vartheta + \partial_j (v_i \partial_j \vartheta)) + \dots \\
 (13) \quad &+ \alpha \frac{\bar{V}_0}{V_0} R \tau \partial_i v_z \quad \quad \quad - \alpha \frac{\bar{V}_0}{V_0} \tau \partial_i (v_j \partial_j \vartheta) - \delta \tau \vartheta^2 \lambda_i \\
 &+ \delta 2 R \tau z \vartheta \lambda_i \quad \quad \quad - \rho_0 \alpha R \tau (z v_j \partial_j v_i + v_z v_i) \\
 \Delta \vartheta + R v_j \lambda_j &= v_j \partial_j \vartheta + \eta R \tau (z \Delta \vartheta + 2 \partial_z \vartheta) \quad \quad \quad - \eta \tau (\vartheta \Delta \vartheta + \partial_j \vartheta \cdot \partial_j \vartheta) + \dots \\
 &+ (\kappa - \eta) R^2 \tau z v_z \quad \quad \quad - \kappa R \tau (z v_j \partial_j \vartheta + v_z \vartheta)
 \end{aligned}$$

Von den zahlreichen Gliedern der Ordnung $\varepsilon \zeta^2$ ist nur ein Glied als Beispiel hingeschrieben worden. Es ist leicht zu sehen, daß alle Glieder mit $\bar{V}_0$ als Faktor als Gradient geschrieben werden können. Ebenso stellt das Glied $\gamma R \tau \partial_i v_z$ einen Gradienten dar. Da wir bei der Lösung der Bewegungsgleichungen alle Gradientenglieder eliminieren werden, schreiben wir sie im folgenden nicht mehr explizit hin, sondern denken sie uns in $\partial_i \pi$ zusammengefaßt.

Berücksichtigt man nur die Terme der Größenordnung ε , so verschwindet die rechte Seite des obigen Systems, und man erhält ein lineares, homogenes Gleichungssystem, dessen Lösung bekannt ist (s. Pellew & Southwell [2]). Von dieser Lösung ausgehend, die nur bis auf die Amplitude ε bestimmt ist, versuchen wir die stationären Gleichungen (13) durch eine Potenzreihenentwicklung nach den Parametern ε und ζ zu lösen:

$$v_i = \sum_{\nu=1, \mu=0} \varepsilon^\nu \zeta^\mu \hat{v}_i^{\nu\mu}, \quad \vartheta = \sum_{\nu=1, \mu=0} \varepsilon^\nu \zeta^\mu \hat{\vartheta}^{\nu\mu}, \quad R = \sum_{\nu=0, \mu=0} \varepsilon^\nu \zeta^\mu \hat{R}^{\nu\mu}$$

Während der Betrag des Parameters ε die Amplitude der Strömung angibt, wenn wir die Funktionen $\hat{v}_i, \hat{\vartheta}$ entsprechend normieren, hat der Faktor ζ^μ lediglich symbolische Bedeutung und gibt die in der nachstehenden Größe enthaltene Potenz der linearen Temperatur-

koeffizienten an bzw. die entsprechende Potenz der Temperaturkoeffizienten höherer Ordnung. Da die Lösung des inhomogenen Gleichungssystems der Ordnung $\varepsilon^v \zeta^\mu$ ($v, \mu \geq 2$) nur bis auf die Lösung des homogenen Gleichungssystems $\tilde{v}_i, \tilde{\vartheta}$ bestimmt ist, benötigen wir eine weitere Relation, von deren Wahl die Lösung insgesamt jedoch nicht abhängt. Es ist praktisch die folgende Orthogonalitätsrelation zu wählen, die für beliebige Lösungen $\tilde{\vartheta}$ zu erfüllen ist:

$$(14) \quad \left(\tilde{v}_2^{\nu\mu} \tilde{\vartheta}' \right)_m = 0 \quad \text{für } v + \mu \geq 2$$

II. Die Stabilität der so gewonnenen stationären Lösungen untersuchen wir, indem wir ihnen Störungen mit der exponentiellen Zeitabhängigkeit $e^{\sigma t}$ überlagern, deren Amplitude infinitesimal sein soll, so daß quadratische Glieder wegfallen. Die Gleichungen für die instationäre Störung sind also linear homogen, und wir können den infinitesimalen Faktor aus den Gleichungen herauskurzen. Analog zum stationären Fall versuchen wir, die Lösung durch eine Potenzreihenentwicklung zu erhalten:

$$\tilde{v}_i = \sum_{v=1, \mu=0} \varepsilon^v \zeta^\mu \tilde{v}_i^{\nu\mu}, \quad \tilde{\vartheta} = \sum_{v=1, \mu=0} \varepsilon^v \zeta^\mu \tilde{\vartheta}, \quad \sigma = \sum_{v=0, \mu=0} \varepsilon^v \zeta^\mu \sigma$$

Da das Gleichungssystem der instationären Störung gemischte Glieder wie z.B. $v_j \partial_t \tilde{v}_i$ enthält, muß der Entwicklungsparameter ε mit dem der zugehörigen stationären Lösung übereinstimmen. Die äußeren physikalischen Bedingungen werden durch die Störung nicht geändert. Der zum statischen Temperaturgradienten proportionale Eigenwert R der Parameter ζ und die Randbedingungen sind daher für die Gleichungen der instationären Störung dieselben wie für die stationären Gleichungen. Um für kleine Werte der Parameter ε, ζ eine Aussage über die Stabilität zu erhalten, müssen die Stabilitätsgleichungen bis zu der Ordnung $(\varepsilon^n \zeta^m)$ untersucht werden, in der entweder die jeweils höchste Anwachsrate ihren niedrigsten Wert bei einer einzigen der stationären Lösungen annimmt oder der niedrigste Wert der höchsten Anwachsrate für mehrere Lösungen gleich, aber von Null verschieden ist. Höhere Ordnungen $(\varepsilon^v \zeta^\mu)$ mit $v \geq n, \mu \geq m$, die nur bei größeren Werten von ζ zur Änderung der Aussagen führen können, werden wir nicht untersuchen. Daher verschwindet in jeder der zu unter-

suchenden Ordnungen das Glied $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$ der Kontinuitätsgleichung und es gilt die Divergenzfreiheit

$$(15) \quad \partial_i \tilde{v}_i^* = 0$$

Ebenso kann $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}$ an die Stelle von $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$ gesetzt werden, und das Gleichungssystem der instationären Störungen lautet, wenn man $t' = \frac{\lambda_0}{c_0 \varrho_0 d^2} t$ als dimensionslosen Zeitmaßstab einführt:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{v}_i + \tilde{v}_i \lambda_i - \partial_i \tilde{\pi} - \rho_0 \tilde{v}_i &= \rho_0 v_i \partial_i \tilde{v}_i + \gamma R \tau (z \Delta \tilde{v}_i + \partial_i \tilde{v}_i) - \gamma \tau (\partial \Delta \tilde{v}_i + \partial_i \partial_j \tilde{v}_j + \partial_i \tilde{v}_i) + \dots \\ &+ \rho_0 \tilde{v}_i \partial_i v_i + \alpha R \tau \partial_i \tilde{v}_i - \gamma \tau (\tilde{v}_i \Delta v_i + \partial_i \tilde{v}_j (\partial_j v_i + \partial_i v_j)) \\ &+ \delta R \tau z \partial_i \tilde{v}_i - \alpha \tau (v_i \partial_i \tilde{v}_i + \tilde{v}_i \partial_i v_i) \\ (16) \quad &- \alpha \tau \partial_i (\partial_j \partial_j \tilde{v}_i + \tilde{v}_i \partial_j v_j) \\ &- \rho_0 \alpha R \tau (z v_i \partial_i \tilde{v}_i + z \tilde{v}_i \partial_i v_i) \\ &- \rho_0 \alpha R \tau (\tilde{v}_i v_i + v_i \tilde{v}_i) - \delta \tau z \partial_i \tilde{v}_i \\ \Delta \tilde{\tilde{v}} + R \tilde{\tilde{v}} \lambda_i - \epsilon \tilde{\tilde{v}} &= v_i \partial_i \tilde{\tilde{v}} + \eta R \tau (z \Delta \tilde{\tilde{v}} + 2 \partial_i \partial_i \tilde{\tilde{v}}) - \eta \tau 2 (\partial \Delta \tilde{\tilde{v}} + \partial_i \partial_j \tilde{\tilde{v}}_j) + \dots \\ &+ \tilde{\tilde{v}}_i \partial_i \tilde{\tilde{v}} + (\kappa - \eta) R^2 \tau z \tilde{\tilde{v}}_i - \alpha R \tau (z \tilde{\tilde{v}}_i \partial_i \tilde{\tilde{v}} + z v_i \partial_i \tilde{\tilde{v}} + \tilde{\tilde{v}}_i \partial_i v_i + v_i \partial_i \tilde{\tilde{v}}) \end{aligned}$$

Die Glieder mit $\tilde{v}_i$ als Faktor und das Glied $\gamma R \tau \partial_i \tilde{v}_i$ sind in $\partial_i \tilde{\pi}$ enthalten, da sie sich als Gradient schreiben lassen.

Setzen wir in das Gleichungssystem (16) den Potenzreihenansatz für $\tilde{v}_i, \tilde{\tilde{v}}, \epsilon$ und die aus dem stationären Gleichungssystem bekannten Reihen für v_i, ∂, R ein, so erhalten wir die Ordnung $(\epsilon^{\nu}, \zeta^{\mu})$ des instationären Gleichungssystems, wenn wir nur die Summanden mit $\epsilon^{\nu} \zeta^{\mu}$ als Faktor betrachten. Die Ordnung $(\epsilon^{\nu}, \zeta^{\mu})$ des instationären Gleichungssystems ist vollständig bestimmt, wenn die Ordnung $(\epsilon^{\nu}, \zeta^{\mu})$ des stationären Gleichungssystems gelöst ist, und wir werden daher im folgenden die beiden Ordnungen zusammen behandeln. Zunächst untersuchen wir die Ordnungen $(\epsilon^{\nu}, \zeta^0)$, wobei wir in der Ordnung (ϵ^3, ζ^0)

die gesuchte Stabilitätsaussage erhalten werden. Die Eigenwerte der folgenden Ordnung (ε^4, ζ^0) können nur bei unsymmetrischen Randbedingungen zu einer Änderung des Stabilitätsverhaltens bei höherer Amplitude führen. Bei den in ζ linearen Ordnungen brauchen wir nur bis zur Ordnung (ε^2, ζ^1) zu gehen. Für die Ordnungen (ε^1, ζ^2) schließlich lassen sich alle wesentlichen Aussagen ohne genauere Kenntnis der einzelnen Terme gewinnen.

Das Gleichungssystem ohne Temperaturkoeffizienten

a) Die Lösung in der Ordnung (ε^1, ζ^0)

Die Gleichungen der Ordnung (ε^1, ζ^0) lauten für die stationäre Strömung und die instationäre Störung

$$\begin{aligned} (17.) \quad \Delta \overset{10}{v}_i + \overset{10}{j} \lambda_i - \partial_i \overset{10}{\pi} &= 0 & \Delta \overset{10}{v}_i + \overset{10}{j} \lambda_i - \partial_i \overset{10}{\pi} - \rho_0 \overset{00}{G} \overset{10}{v}_i &= 0 \\ \Delta \overset{10}{v} + R \overset{10}{v}_j \lambda_j &= 0 & \Delta \overset{10}{v} + \overset{00}{R} \overset{10}{v}_j \lambda_j - \overset{00}{G} \overset{10}{v} &= 0 \end{aligned}$$

Die Randbedingungen sind in allen Ordnungen (ε^1, ζ^0) homogen:
 An der festen Grenzebene gilt $\overset{10}{j} = 0$, $\overset{10}{v}_2 = 0$, $\partial_2 \overset{10}{v}_2 = 0$.
 An der freien Grenzebene gilt $\overset{10}{j} = 0$, $\overset{10}{v}_2 = 0$, $\partial_2 \overset{10}{v}_2 = 0$.
 Die in [2] zusammengefaßten Untersuchungen ergeben, daß es einen niedrigsten Eigenwert $\overset{00}{R} = R_K$ gibt, zu dem eine Lösung existiert und durch den der kritische Temperaturgradient, bei dem die statische Schichtung instabil wird, in Übereinstimmung mit dem Experiment bestimmt wird. Die zu $\overset{00}{R} = R_K$ gehörenden instationären Störungen haben als höchste Anwachsrate $\overset{00}{G} = 0$, zu höheren Eigenwerten $\overset{00}{R} > R_K$ existieren Störungen mit positiver Anwachsrate. Dies läßt sich aus dem rechten Gleichungssystem von (17) direkt ersehen, wenn man $\rho_0 = 0$ und den Fall "frei-frei" annimmt, bei dem $\overset{10}{v}_2$ und $\overset{10}{v}$ bis auf einen konstanten Faktor gleich sind. Im folgenden untersuchen wir nur den Fall $\overset{00}{R} = R_K$, bei dem die Strömung in niedrigster Ordnung nicht instabil ist, und berücksichtigen nur die stärksten Störungen mit der Anwachsrate $\overset{00}{G} = 0$, für die das instationäre Gleichungssystem mit dem stationären übereinstimmt. Auf Seite 43 werden wir untersuchen, inwieweit dies gerechtfertigt ist.

Differenziert man die erste der Bewegungsgleichungen (17) nach y, die zweite nach x und subtrahiert sie voneinander, so erhält man

$$(18) \quad \Delta (\partial_y \overset{10}{v}_x - \partial_x \overset{10}{v}_y) = 0$$

Auf den Rändern der Schicht verschwindet $\partial_y v_x - \partial_x v_y$ im Fall "fest-fest" und $\partial_y (\partial_y v_x - \partial_x v_y)$ im Fall "frei-frei". Aus der Mittelwertseigenschaft der harmonischen Funktionen folgt daher, daß diese Ausdrücke überall in der Schicht verschwinden, wenn man die nach dem unendlichen hin unbegrenzt wachsende Lösung von (18) bzw. der nach z differen-

zierten Gleichung (18) ausschließt. Im Fall "frei-frei" erhalten wir durch Integration $\partial_y \psi_x^0 - \partial_x \psi_y^0 = h(x,y)$, wobei $h(x,y)$ wegen (18) eine harmonische Funktion in der x,y -Ebene sein muß. Da wir jedoch die nach dem unendlichen hin über alle Grenzen wachsenden Lösungen nicht zulassen und die Möglichkeit einer starren Rotation der Schicht ausschließen wollen, folgt $h(x,y)=0$. Die Fälle "fest-frei" und "frei-fest" lassen sich auf den Fall "fest-fest" zurückführen und es gilt deshalb in allen Fällen

$$(19) \quad \partial_y \psi_x^0 - \partial_x \psi_y^0 = 0$$

Wir können daher eine Funktion $\partial_z \psi^0$ einführen, aus der sich ψ_x^0 und ψ_y^0 durch Differentiation ergeben, und erhalten, wenn wir außerdem die Gleichung $\partial_j \psi_j^0 = 0$ und die Definition $\Delta_z = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$ benutzen

$$\psi_x^0 = \partial_x \partial_z \psi^0, \quad \psi_y^0 = \partial_y \partial_z \psi^0, \quad \psi_z^0 = -\Delta_z \psi^0$$

Zur Abkürzung führen wir $\delta_x = \partial_x \partial_z$, $\delta_y = \partial_y \partial_z$, $\delta_z = -\Delta_z$ ein und behaupten, daß die Beziehung (18) auch in den Ordnungen $(\varepsilon^1 \zeta^n)$, $(\varepsilon^2 \zeta^n)$ des Gleichungssystems gilt und daher in diesen Ordnungen die Darstellung

$$(20) \quad \psi_i^{vv} = \delta_i \psi^{vv} \quad (v=1,2)$$

möglich ist. In der Ordnung $(\varepsilon^2 \zeta^0)$ lautet die rechte Seite der zu (18) analogen Gleichung

$$\partial_y (\delta_j \psi^0 \partial_j \delta_x \psi^0) - \partial_x (\delta_j \psi^0 \partial_j \delta_y \psi^0)$$

und das Verschwinden dieses Ausdrucks folgt aus der unten abgeleiteten Form der Lösung ψ^0 . Ebenso verschwindet der entsprechende Ausdruck im zugehörigen instationären Gleichungssystem und in den Ordnungen $(\varepsilon^1 \zeta^n)$, $(\varepsilon^2 \zeta^n)$ mit $n \geq 1$. Nach dem obigen Schluß folgt daraus mit $\partial_j \psi_j^{vv} = 0$ die Behauptung.

Wendet man auf die ersten drei Gleichungen von (17) den Operator δ_j an, so erhält man

$$\Delta \Delta \Delta_z \psi^0 - \Delta_z \psi^0 = 0$$

Hieraus bekommt man mit der vierten Gleichung zusammen

$$(21) \quad (\Delta \Delta \Delta - R_k \Delta_z) \Delta_z \psi^0 = 0$$

Man sucht die Lösung dieser Gleichung in der Form $\psi^0 = w(x,y) f(z)$ und erhält als Separationsbedingung

$$\Delta_z w(x,y) + a^2 w(x,y) = 0$$

Ein vollständiges Orthonormalsystem von Lösungen dieser Gleichung ist

$$(22) \quad w_s = e^{i k_s x} = w_{-s}^* \quad (s = -\infty, \dots, -1, 1, \dots, \infty)$$

wobei w der Vektor mit den Komponenten x, y ist und k_s die Menge aller zweikomponentigen reellen Vektoren mit $|k_s| = a$ durchläuft.

Die allgemeine Lösung der stationären Gleichung, welche wir der folgenden Betrachtung zugrunde legen, schreiben wir in der Form

$$(23) \quad \tilde{v} = w \cdot f(z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s w_s f(z) \quad \text{mit } c_s = c_{-s}^* \quad \text{und} \quad \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s c_s^* = 1$$

Die Mannigfaltigkeit der instationären Störungen beschreiben wir durch

$$(24) \quad \tilde{v} = \tilde{w} \cdot f(z) = \sum_s \tilde{c}_s w_s f(z) \quad \text{mit} \quad \sum_s \tilde{c}_s \tilde{c}_s^* = 1$$

wobei $\tilde{w}_s$ das gesamte Orthogonalsystem (22) durchläuft. Aus der von Pellew & Southwell angegebenen Lösung von (21)

$$f(z) = \sum_{v=1}^3 (A_v \cosh 2\mu_v z + B_v \sinh 2\mu_v z) \quad \text{mit} \quad 4\mu_v^2 = a^2 \left(1 - \frac{R_K}{a^2} \omega_v\right),$$

wobei ω_v ($v=1,2,3$) die dritten Einheitswurzeln $\sqrt[3]{1}$ sind, wird $f(z)$ durch die Randbedingungen eindeutig bestimmt, ebenso die Werte von R_K und a :

Im Fall "frei-frei" ist

$$f(z) = \frac{1}{a^2} \cos \pi z, \quad R_K = \frac{27}{4} \pi^4, \quad a^2 = \frac{1}{2} \pi^2$$

Im Fall "fest-fest" ist

$$f(z) = \left[\frac{\cos 2\alpha z}{\cos \alpha} + \frac{\cos 2\beta z \cdot \cos 2\gamma z}{2 \cosh \beta \cdot \cosh \gamma} - 3 \frac{\sinh 2\beta z \cdot \sinh 2\gamma z}{2 \sinh \beta \cdot \sinh \gamma} \right] \frac{\cos \alpha}{a^2}$$

$$R_K = 1707,8, \quad a = 3,117, \quad \alpha = 1,986, \quad \beta = 2,597, \quad \gamma = 1,063$$

Im Fall "frei-fest" und im Fall "fest-frei" ist

$$f(z) = \left[\frac{\sin 2\alpha z}{\sin \alpha} - \frac{3\beta^3 + 1}{10} \frac{\sinh 2\beta z \cdot \cos 2\gamma z}{\sinh \beta \cdot \cosh \gamma} + \frac{3\beta^3 - 9}{10} \frac{\cosh 2\beta z \cdot \sinh 2\gamma z}{\cosh \beta \cdot \sinh \gamma} \right] \frac{\sin \alpha}{a^2}$$

$$R_K = 17610,4, \quad a = 5,365, \quad \alpha = 3,570, \quad \beta = 4,555, \quad \gamma = 1,895,$$

wobei die freie Grenzebene bei $z = 0$ und die feste bei $z = \pm \frac{1}{2}$ angenommen wird. Dabei haben wir die von W.H. Reid & D.L. Harris [7] berechneten Werte für R_k und a und die Relationen

$$\frac{\sinh \beta \cdot \sin \gamma}{\cosh \beta \cdot \cos \gamma} = \sqrt{3} \quad \text{im Fall "fest-fest" bzw.} \quad \frac{\sinh \beta \cdot \cos \gamma}{\cosh \beta \cdot \sin \gamma} = -\frac{1}{3}$$

in den Fällen "frei-fest" und "fest-frei" benutzt.

b) Die Lösung in der Ordnung (ε^1, ζ^0)

Das Gleichungssystem in der Ordnung (ε^1, ζ^0) ergab zu den Eigenwerten $\tilde{R}^0 = R_k$ und $\tilde{\zeta}^0 = 0$ eine unendliche Zahl von stationären Lösungen. Es muß nun untersucht werden, für welche dieser Lösungen die Gleichungen höherer Ordnung lösbar sind und inwieweit sie sich in der Stabilität unterscheiden. In der Ordnung (ε^1, ζ^0) lautet das stationäre Gleichungssystem:

$$(25) \quad \begin{aligned} \Delta \tilde{v}_i^0 + \tilde{\zeta}^0 \lambda_i - \partial_i \tilde{\pi}^0 &= \rho_0 \tilde{v}_j^0 \partial_j \tilde{v}_i^0 \\ \Delta \tilde{\zeta}^0 + R_k \tilde{v}_j^0 \lambda_j &= \tilde{v}_j^0 \partial_j \tilde{\zeta}^0 - \tilde{R}^0 \tilde{v}_j^0 \lambda_j \end{aligned}$$

In seiner Arbeit [8] zeigt Lortz, daß das Operatorsystem der linken Seite des Gleichungssystems für alle vier Fälle der homogenen Randbedingungen die Eigenschaft der Selbstadjungiertheit besitzt und daß der Eigenwert $\tilde{R}^0$ für alle Lösungen $\tilde{v}_i^0, \tilde{\zeta}^0$ der Ordnung (ε^1, ζ^0) verschwindet.

Durch die Anwendung von δ_i auf die erste Gleichung von (25) gewinnt man

$$(26) \quad \Delta \Delta \Delta_2 \tilde{v}^0 - \Delta_2 \tilde{\zeta}^0 = \rho_0 \delta_i (\tilde{v}_j^0 \partial_j \tilde{v}_i^0)$$

Mit der vierten Gleichung zusammen erhält man daraus

$$(27) \quad \begin{aligned} (\Delta \Delta \Delta - R_k \Delta_2) \Delta_2 \tilde{v}^0 &= \rho_0 \Delta \delta_i (\tilde{v}_j^0 \partial_j \tilde{v}_i^0) + \Delta_2 \tilde{v}_j^0 \partial_j \tilde{\zeta}^0 \\ (\Delta \Delta \Delta - R_k \Delta_2) \tilde{\zeta}^0 &= \rho_0 R_k \delta_i (\tilde{v}_j^0 \partial_j \tilde{v}_i^0) + \Delta \Delta \tilde{v}_j^0 \partial_j \tilde{\zeta}^0 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems schreiben wir in der Form:

$$(28) \quad \begin{aligned} \tilde{v}_i^0 &= \delta_i \sum_{x,\lambda=-n}^n c_x c_\lambda w_x w_\lambda F(\varphi_{x,\lambda}, z) \\ \tilde{v}^0 &= \sum_{x,\lambda=-n}^n c_x c_\lambda w_x w_\lambda G(\varphi_{x,\lambda}, z) \end{aligned}$$

Da sich die rechten Seiten der Gleichungen (27) als Summen von Exponentialfunktionen schreiben lassen, erhält man eine Lösung, indem man jeden Summanden durch den Faktor D dividiert, welchen man bei der Anwendung des Operators $\Delta\Delta\Delta - R_k\Delta_2$ auf den Summanden erhält.

Im Fall "frei-frei" erhält man auf diese Weise bereits die den Randbedingungen genügende Lösung

$$\begin{aligned} F(\varphi_{x,\lambda}, z) &= \frac{-p_0 \Delta}{2D} \left[a^4 (1 - \varphi_{x,\lambda}) f f' - a^2 (f f'' - \varphi_{x,\lambda} f' f') \right]' + \frac{1}{D} (f g' - \varphi_{x,\lambda} f' g) \\ G(\varphi_{x,\lambda}, z) &= \frac{p_0 R_k}{2D} \left[a^4 (1 - \varphi_{x,\lambda}) f f' - a^2 (f f'' - \varphi_{x,\lambda} f' f') \right]' (k_x + k_\lambda)^2 + \frac{\Delta\Delta}{D} (f g' - \varphi_{x,\lambda} f' g) \end{aligned}$$

(In diesen Ausdrücken steht Δ für $\partial_{zz}^2 - (k_x + k_\lambda)^2$, $\varphi_{x,\lambda}$ für $\frac{k_x k_\lambda}{a^2}$, f' für $\partial_z f(z)$, g für $(\partial_{zz}^2 - a^2)^2 f$. Die Indizes x, λ laufen über $(-n, \dots, -1, 1, \dots, n)$).

In den übrigen Fällen muß jeweils eine Lösung der homogenen Gleichungen (27) zur gleichen x, y -Abhängigkeit hinzugefügt werden, um die Randbedingungen zu erfüllen, wobei die Orthogonalitätsrelation (14) zu beachten ist. Die Orthogonalitätsrelation legt übrigens nur den Anteil der Lösung $\tilde{v}^0$ in $\tilde{v}^0$ fest. Die entsprechende Relation für $\tilde{v}^0$ ergibt sich, wenn man die Gleichung (26) mit $\tilde{v}^0$ multipliziert, über das Schichtvolumen mittelt und dabei den Operator $\Delta\Delta$ durch partielle Integration überwälzt:

$$(\tilde{v}_z^0 \cdot \Delta\Delta \tilde{v}^0)_m + (\Delta_2 \tilde{v}^0 \cdot \tilde{v}^0)_m = -(\tilde{v}^0 \cdot p_0 \delta_i (\tilde{v}_z^0 \partial_z \tilde{v}^0))_m$$

Da der erste Term wegen (14) stets verschwindet und die rechte Seite in dieser Ordnung ebenfalls, gilt $(\tilde{v}^0 \cdot \tilde{v}_z^0)_m = 0$. Die Funktionen $F(\varphi_{x,\lambda}, z), G(\varphi_{x,\lambda}, z)$ wurden von Lortz [8] für den Fall "fest-fest" berechnet. Für den Fall "frei-fest" mit $p_0 = 0$ sind die Funktionen im Anhang c) wiedergegeben, die Funktionen für den Fall "fest-frei" erhält man daraus durch Spiegelung am Nullpunkt.

Der Eigenwert $\overset{10}{G}$ des zugehörigen instationären Gleichungssystems

$$(30) \quad \begin{aligned} \Delta \overset{20}{v}_i + \overset{20}{v} \lambda_i - \partial_i \overset{20}{\pi} &= \rho_0 \overset{10}{G} \overset{10}{v} + \rho_0 (\overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v}_i + \overset{10}{v}_j \partial_i \overset{10}{v}_j) \\ \Delta \overset{20}{\psi} + R \overset{20}{v}_j \lambda_j &= \overset{10}{G} \overset{10}{\psi} + \overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{\psi} + \overset{10}{v}_j \partial_i \overset{10}{\psi} \end{aligned}$$

verschwindet ebenso wie der Eigenwert $\overset{10}{R}$ der stationären Gleichungen für alle Lösungen $\overset{10}{v}_i, \overset{10}{\psi}$ und für alle vier Fälle der Randbedingungen. Da

$$\delta_i (\overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v}_i) = \delta_i (\overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v}_i), \quad \overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{\psi} = \overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{\psi}$$

gilt, lautet Lösung von (30):

$$(31) \quad \begin{aligned} \overset{20}{v} &= \delta_i 2 \sum_{x=-n}^n \sum_s c_x \tilde{c}_s w_x w_s F(\varphi_{xs}, z) \\ \overset{20}{\psi} &= 2 \sum_{x=-n}^n \sum_s c_x \tilde{c}_s w_x w_s G(\varphi_{xs}, z) \end{aligned}$$

c) Die Lösbarkeitsbedingung in der Ordnung $(\varepsilon^3 \zeta^0)$

In der Ordnung $(\varepsilon^1 \zeta^0)$ erhielten wir keine Aufspaltung der Eigenwerte R und G müssen daher die nächsthöhere Ordnung $(\varepsilon^3 \zeta^0)$ untersuchen. Das stationäre Gleichungssystem lautet in dieser Ordnung:

$$\begin{aligned} \Delta \overset{20}{v}_i + \overset{20}{v} \lambda_i - \partial_i \overset{20}{\pi} &= \rho_0 (\overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v}_i + \overset{10}{v}_j \partial_i \overset{10}{v}_j) \\ \Delta \overset{20}{\psi} + R \overset{20}{v}_j \lambda_j &= \overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{\psi} + \overset{10}{v}_j \partial_i \overset{10}{\psi} - \overset{10}{R} \overset{10}{v}_j \lambda_j \end{aligned}$$

Multipliziert man das Gleichungssystem mit einer beliebigen Lösung der Ordnung $(\varepsilon^1 \zeta^0)$ $R_x \delta_i \overset{10}{v}'_i, \overset{10}{\psi}'$, addiert die Gleichungen und mittelt über das Schichtvolumen, so erhält man eine Gleichung für $\overset{20}{R}$:

$$(32) \quad \overset{20}{R} (\overset{10}{v}'_i \overset{10}{\psi}')_m = (R_x \delta_i \overset{10}{v}'_i \rho_0 (\overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v}_i + \overset{10}{v}_j \partial_i \overset{10}{v}_j))_m + (\overset{10}{\psi}' (\overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{\psi} + \overset{10}{v}_j \partial_i \overset{10}{\psi}))_m$$

Ebenso erhält man aus den zugehörigen instationären Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta \overset{20}{v}_i + \overset{20}{v} \lambda_i - \partial_i \overset{20}{\pi} &= \rho_0 (\overset{20}{v}_j \partial_j \overset{10}{v}_i + \overset{20}{v}_j \partial_i \overset{10}{v}_j + \overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v}_i + \overset{10}{v}_j \partial_i \overset{10}{v}_j) + \rho_0 \overset{20}{G} \overset{10}{v}_i \\ \Delta \overset{20}{\psi} + R \overset{20}{v}_j \lambda_j &= \overset{20}{v}_j \partial_j \overset{10}{\psi} + \overset{20}{v}_j \partial_i \overset{10}{\psi} + \overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{\psi} + \overset{10}{v}_j \partial_i \overset{10}{\psi} - \overset{10}{R} \overset{10}{v}_j \lambda_j + \overset{20}{G} \overset{10}{\psi} \end{aligned}$$

für den Eigenwert $\overset{20}{G}$ die Beziehung:

$$(33) \quad -\overset{20}{G}(\rho \cdot R_{\kappa} \overset{10}{v}_i \overset{10}{v}'_i + \overset{10}{v} \overset{10}{v}')_m = -\overset{20}{R}(\overset{10}{v}_i \overset{10}{v}')_m + \left(\overset{10}{v}'(\overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v} + \overset{10}{v} \partial_j \overset{10}{v}' + \overset{10}{v} \partial_j \overset{20}{v} + \overset{10}{v} \partial_j \overset{10}{v}') \right)_m \\ + \left(R_{\kappa} \overset{10}{v}_i \rho \cdot (\overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v}_i + \overset{20}{v}_j \partial_j \overset{10}{v}_i + \overset{10}{v} \partial_j \overset{10}{v}' + \overset{10}{v} \partial_j \overset{20}{v}_i) \right)_m$$

Während die zu (32) und (33) analogen Beziehungen für die Eigenwerte $\overset{10}{R}$ und $\overset{10}{G}$ für alle Lösungen $\overset{10}{v}_i, \overset{10}{v}'$ bzw. $\overset{10}{v}_i, \overset{10}{v}'$ der Ordnung $(\varepsilon^1 \zeta^0)$ bei einer beliebigen Wahl der Lösung $\overset{10}{v}_i, \overset{10}{v}'$ identisch erfüllt werden, schränken die Bedingungen (32) und (33) die Mannigfaltigkeit der Lösungen der Ordnung $(\varepsilon^1 \zeta^0)$ ein, d.h. nicht für alle Lösungen $\overset{10}{v}_i, \overset{10}{v}'$ bzw. $\overset{10}{v}_i, \overset{10}{v}'$ liefert eine beliebige Wahl von $\overset{10}{v}_i, \overset{10}{v}'$ stets den gleichen Wert von $\overset{20}{R}$ und $\overset{20}{G}$, welches die Bedingung für die Lösbarkeit des Eigenwertproblems darstellt. Bevor wir auf diese Lösbarkeitsbedingungen näher eingehen, formen wir die eine Hälfte der Terme, in denen die $(\varepsilon^1 \zeta^0)$ -Funktionen an letzter Stelle stehen, durch partielle Integration um, wie an dem folgenden Beispiel gezeigt wird:

$$(\overset{10}{v}_i \overset{10}{v}_j \partial_j \overset{20}{v}_i)_m = (\partial_j (\overset{10}{v}_j \overset{10}{v}_i \overset{20}{v}_i))_m - (\overset{10}{v}_i \overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v}_i)_m - (\overset{10}{v}_i \overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v}_i)_m = -(\overset{10}{v}_i \overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v}_i)_m$$

Der zweite Term in dieser Zeile verschwindet für $j = z$ bei der Integration über z wegen der Randbedingungen und für $j = x, y$ bei der Integration über die Ebene, da über die Ableitung eines Produktes von trigonometrischen Funktionen und damit über eine Summe von trigonometrischen Funktionen mit nicht verschwindendem Argument gemittelt wird. Der dritte Term verschwindet wegen $\partial_j \overset{10}{v}_j = 0$.

Durch weitere partielle Integration wälzen wir den Operator δ_i über:

$$(\overset{10}{v}_i \overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v}')_m = (\delta_i \overset{10}{v} \overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v}')_m = (\overset{10}{v} \delta_i (\overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v}'))_m$$

Die andere Hälfte der Terme in den Lösbarkeitsbedingungen verschwindet: Wälzen wir zum Beispiel in dem Term $(\overset{10}{v}' \overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v})_m$ den Operator δ_j durch partielle Integration über:

$$(\overset{10}{v}' \overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v})_m = (\overset{10}{v}' \delta_j \overset{10}{v}_j \partial_j \overset{10}{v})_m = (\overset{10}{v}' \delta_j (\overset{10}{v}' \partial_j \overset{10}{v}))_m = 0$$

so folgt das Verschwinden aus der Beziehung

$$(34) \quad \delta_i (\overset{00'}{\mathcal{V}} \partial_j \overset{00}{\mathcal{V}}) = \delta_i \overset{00'}{\mathcal{V}} \partial_j \overset{00}{\mathcal{V}} - \partial_j \overset{00'}{\mathcal{V}} \delta_i \overset{00}{\mathcal{V}} = 0$$

Dieser Ausdruck ergibt immer dann Null, wenn die beiden Funktionen in der z -Abhängigkeit und in dem Faktor, den die Anwendung des Operators Δ_2 ergibt, übereinstimmen. Zur Abkürzung für die z -Abhängigkeit in $R_K \rho_0 \overset{00}{\mathcal{V}} \delta_i (\overset{00'}{\mathcal{V}} \partial_j \overset{00}{\mathcal{V}}) + \overset{00'}{\mathcal{V}} \partial_j \delta_i \overset{00}{\mathcal{V}}$ führen wir ein

$$(35) \quad L(\varphi_{x\lambda}, \varphi_{\mu\nu}) = \overline{f}(\varphi_{x\lambda}, z) \frac{R_K \rho_0}{2} \left[a^4 (1 - \varphi_{\mu\nu}) \{ f - a^2 (f f' - \varphi_{\mu\nu} f' f')' (\kappa_\mu + \kappa_\lambda)^2 + G(\varphi_{x\lambda}, z) (f g' - \varphi_{\mu\nu} f' g') \right]$$

und können jetzt die Lösbarkeitsbedingung (32) folgendermaßen schreiben, wenn wir $\overset{00'}{\mathcal{V}} = w_\nu f(z)$ annehmen

$$(36) \quad 0 = \overset{20}{R} (f g w_\nu \sum_{\lambda} c_\lambda w_\lambda)_{\mu} + \left(\sum_{x, \lambda, \mu} c_x c_\lambda w_x w_\lambda L(\varphi_{x\lambda}, \varphi_{\mu\nu}) c_\mu w_\mu w_\nu \right)_m$$

Läßt man die Lösung w_ν das Orthogonalsystem (22) durchlaufen, so erhält man $2n$ Gleichungen für $x = -n, \dots, -1, 1, \dots, n$,

$$(37) \quad 0 = \overset{20}{R} N + \sum_{\lambda \neq x} (L(\varphi_{x\lambda}, \varphi_{x-\lambda}) + L(\varphi_{x-\lambda}, \varphi_{\lambda-x}))_{\mu} c_\lambda c_\lambda^* + (L(\varphi_{xx}, \varphi_{x-x}))_{\mu} c_x c_x^*,$$

während in allen übrigen Fällen sämtliche Integrale von (36) verschwinden, weil die Summe der in einem Summanden von (36) vorkommenden κ -Vektoren nie Null ergibt. Da $(L(\varphi_{x\lambda}, \varphi_{x-\lambda}))_{\mu}$ nur von κ_x, κ_λ abhängt und $N = (f g)_{\mu}$ eine Konstante ist, ergeben die Gleichungen (37) zusammen mit der Normierungsbedingung $\sum_{\lambda} c_\lambda c_\lambda^* = 1$ ein inhomogenes Gleichungssystem von $2n+1$ Gleichungen für c_λ und $\overset{20}{R}$. Im "regulären" Fall, in dem die Winkel zwischen zwei benachbarten κ -Richtungen gleich sind, erhält man als einzige Lösung

$$(38) \quad |c_n| = \dots = |c_n| = \frac{1}{\sqrt{2n}}, \quad \overset{20}{R} N = \frac{1}{2n} \left(\sum_{\lambda \neq x} (L(\varphi_{x\lambda}, \varphi_{x-\lambda}) + L(\varphi_{x-\lambda}, \varphi_{\lambda-x}))_{\mu} + (L(\varphi_{xx}, \varphi_{x-x}))_{\mu} \right)$$

Wir erhalten also durch die Lösbarkeitsbedingung eine Einschränkung der Mannigfaltigkeit der stationären Lösungen, und es stellt sich die Frage, welche zusätzlichen Einschränkungen die Lösbarkeitsbedingungen der höheren Ordnungen ($\epsilon^\nu \xi^0$) mit $\nu > 3$ ergeben. Außer der eventuellen Forderung, daß die Gleichung (38) für die Koeffizienten c_λ selbst zu gelten hat statt für ihre Beträge, wird sich im Fall der regulären Lösungen in den höheren Ordnungen keine weitere Einschränkung ergeben. Denn durchläuft in der Lösbarkeitsbedingung die

beliebige Lösung $\overset{10}{V}$ die in der regulären Lösung enthaltenen Funktionen des Orthogonalsystems, so ergibt sich stets der gleiche Wert der Integrale, die den Eigenwert $\overset{10}{RN}$ bestimmen, während die Integrale bei den übrigen Funktionen des Orthogonalsystems verschwinden. Das gleiche gilt noch im Fall der "halbregulären" Lösungen, die durch die Überlagerung einer regulären Lösung mit der gleichen, nur um den Winkel α gedrehten Lösung, entstehen. (Hierbei muß der Fall $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ausgeschlossen werden, wie wir bei der Betrachtung der Ordnung $(\varepsilon^2 \zeta^1)$ sehen werden.) Da es in der Bedingung (37) nur auf den Cosinus des Winkels zwischen zwei $\mathcal{K}$ -Vektoren ankommt, haben die halbregulären Lösungen nämlich die gleichen Eigenschaften wie die regulären. Auch in den anderen Ordnungen $(\varepsilon^v \zeta^{\mu})$ des Gleichungssystems werden die regulären und halbregulären Lösungen nicht weiter eingeschränkt, und es existiert daher eine Schar von verschiedenen stationären Lösungen, so daß die Stabilitätsbetrachtung notwendig ist, um die physikalisch realisierte Lösung auszusondern.

Für die folgende Untersuchung brauchen wir von der stationären Lösung $\overset{10}{V}$ nur vorauszusetzen, daß ihre Koeffizienten c_λ den Gleichungen (37) genügen, und gehen damit in die Lösbarkeitsbedingung (33) des instationären Gleichungssystems ein. Läßt man die Lösung $\overset{10}{V} = \omega_\varepsilon f(z)$ wieder das Orthogonalsystem (22) durchlaufen, so erhält man ein homogenes, lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $\tilde{c}_\varepsilon$. Damit dieses Gleichungssystem eine Lösung hat, muß die Determinante seiner Koeffizientenmatrix, die sogenannte Säkulardeterminante, verschwinden. Die diskreten Eigenwerte $\overset{20}{\varepsilon^2}$, für die diese Bedingung erfüllt ist, sind bis auf den positiven Faktor ε^2 die Anwachsraten der möglichen Störungen, und wir wollen daher Aussagen über ihre Vorzeichen aus der Koeffizientenmatrix gewinnen. Das allgemeine Element dieser Matrix lautet

$$\overset{20}{G} M \delta_{\varepsilon\sigma} + T_{\varepsilon\sigma}$$

mit (39)
$$T_{\varepsilon\sigma} = \left(\sum_{x,\lambda,\mu} c_x c_\lambda w_x w_\lambda L(\varphi_{x,\lambda}, \varphi_{\mu,\nu}) c_\mu w_\mu w_\nu \right)_m \frac{1}{c_\varepsilon^*} \delta_{\varepsilon\sigma} - \left(\sum_{x,\lambda} c_x c_\lambda w_x w_\lambda L(\varphi_{x,\lambda}, \varphi_{\varepsilon\sigma}) w_\varepsilon w_\sigma \right)_m - 2 \left(\sum_{x,\lambda} c_x w_x w_\varepsilon L(\varphi_{x,\varepsilon}, \varphi_{\lambda\sigma}) c_\lambda w_\lambda w_\sigma \right)_m$$

Durch den ersten Term der rechten Seite haben wir mit Hilfe der Gleichung (36) $\overset{20}{R} (fg w_s w_c)_m$ ersetzt, wobei w_v eine beliebige der in w enthaltenen Funktionen sein soll. Die Matrix sei so angeordnet, daß der Index ρ die Zeilen von $-\infty$ her, der Index σ die Spalten von $+\infty$ her durchläuft, also $(w_s w_c) = \delta_{\rho\sigma}$ ist. M ist eine Abkürzung für den positiv definiten Ausdruck

$$\left(\rho_0 R_{\kappa} \overset{10}{\tilde{v}}_i \overset{10}{\tilde{v}}_i + \overset{10}{\tilde{v}} \overset{10}{\tilde{v}} \right)_m = \left(\rho_0 \frac{(\partial_{x_2}^2 - a^2)^3}{-a^2} f \cdot f_i f_i + g g \right)_m = (1 + \rho_0) (g g)_m$$

Da die Mittelung über ein Produkt der Form $\prod e^{i \kappa_v w}$ stets verschwindet, wenn die Summe der κ -Vektoren nicht Null ergibt, können wir folgende Schlüsse ziehen, indem wir bei gegebenen zwei κ -Vektoren auf der rechten Seite der Integrale (39) nachsehen, wie oft auf der linken Seite die negative Summe dieser κ -Vektoren existiert.

I. Die Nichtdiagonalelemente der Matrix (39) verschwinden, wenn nicht beide κ -Vektoren κ_s und κ_c zu den Vektoren κ_x ($x = -n, \dots, n$) gehören. In diesem Fall verschwindet nämlich die Summe der vier κ -Vektoren nie, weil die nicht verschwindende Summe zweier κ -Vektoren, die der Bedingung $|\kappa| = a$ genügen, umkehrbar eindeutig durch die beiden κ -Vektoren bestimmt ist. Die Säkulardeterminante ist daher das Produkt der Determinante der $2n$ -reihigen Teilmatrix, in der w_s und w_c beide die $2n$ Funktionen w_x ($x = -n, \dots, n$) durchlaufen, mit den übrigen Diagonalelementen.

II. Wählt man in den Diagonalgliedern der $2n$ -reihigen Teilmatrix $w_v = w_s^* = w_c$, so erkennt man, daß in T_{ss} sämtliche Summanden des ersten Terms noch einmal vorkommen mit entgegengesetztem Vorzeichen, so daß nur folgende Summanden übrigbleiben:

$$(40) \quad T_{ss} = -c_s c_s^* \left(L(\varphi_{s-s}, \varphi_{ss}) \right)_m - 2 c_s c_s^* \left(L(\varphi_{-s}, \varphi_{s-s}) \right)_m$$

Die gleichen Summanden, nur daß c_s durch c_s^* zu ersetzen ist, stehen in derselben Zeile der Nebendiagonale, da die übrigen Integrale in T_{s-s} verschwinden.

III. Die nichtverschwindenden Summanden der übrigen Elemente der $2n$ -reihigen Teilmatrix sind

$$(41) \quad T_{sc} = -2 c_s^* c_c^* \left(L(\varphi_{-s, \sigma}, \varphi_{sc}) \right)_m - 2 c_s^* c_s^* \left(L(\varphi_{s, \sigma}, \varphi_{-s\sigma}) \right)_m - 2 c_s^* c_c^* \left(L(\varphi_{s, s}, \varphi_{-c\sigma}) \right)_m$$

Da $\varphi_{-g} = \varphi_{g-g}$ ist, folgt, daß die Matrix hermitisch ist und die Säkulardeterminante nur reelle Nullstellen besitzt.

Multipliziert man die Zeilen mit c_g und die Spalten mit c_g , so wird die $2n$ -reihige Matrix spiegelsymmetrisch bezüglich der Diagonale und der Nebendiagonale. Addiert man daher die untere Hälfte zur oberen und die rechte Hälfte zur linken, multipliziert dann die linke Hälfte mit dem Faktor $1/2$ und subtrahiert sie von der rechten und multipliziert die obere Hälfte mit $1/2$ und subtrahiert sie von der unteren, so erhält man die folgende Form der Matrix, die man direkt erhalten hätte, wenn man das Orthogonalsystem

$$(42) \quad \frac{c_g e^{ik_g x} + c_g^* e^{-ik_g x}}{2}, \quad \frac{c_g e^{ik_g x} - c_g^* e^{-ik_g x}}{2}, \quad (g = 1, \dots, n)$$

benutzt hätte:

$$(43) \quad \left| \begin{array}{ccc|ccc} c_n^* c_n \left(\frac{g^2 M}{2} + T_{nn} \right) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c_g c_g T_{gg} & & & 0 \\ c_g c_g T_{gg} & & & & & \\ \hline & & c_n^* c_n \left(\frac{g^2 M}{2} + T_{nn} \right) & & & \\ & 0 & & & & \\ & & & c_n^* c_n \frac{g^2 M}{2} & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & c_n^* c_n \frac{g^2 M}{2} \end{array} \right|$$

In dem letzten Term stimmen (40) und (41) überein, wenn man von den Koeffizienten c_g^* , c_g absieht. Dieser Term läßt sich mit

$$(44) \quad G(\varphi_{-g}, z) = \int_0^z f g dz - (f g)_m z$$

auf die folgende Form bringen, aus welcher hervorgeht, daß er positiv ist:

$$(45) \quad -2 (L(\varphi_{-g}, \varphi_{-g}))_m = 2 (f g f g)_m - 2 (f g)_m (f g)_m$$

Wir behaupten, daß $T_{gg}^2 - T_{gg}^2$ stets negativ ist. Im Fall "frei-frei" ist

$$(46) \quad \begin{aligned} (L(\varphi_{-g}, \varphi_{-g}))_m = & -\frac{R_K}{D} (1 - \varphi_{-g})^2 (\pi^2 a^2) (f f f f')_m a^4 \left[(4\pi^2 + 2a^4 (1 + \varphi_{-g}))^2 \right. \\ & \left. + p_0 2a^2 (1 + \varphi_{-g}) (p_0 (4\pi^2 + 2a^2 (1 + \varphi_{-g})) + 2(\pi^2 + a^2)^2) \right] \end{aligned}$$

negativ, und weil daher alle Terme von T_{gs} gleiches Vorzeichen haben, während der erste Term von T_{gs} verschwindet, folgt die Behauptung. Im Fall "fest-fest" hat Lortz [8] die Behauptung bewiesen. In den Fällen "frei-fest" und "fest-frei" folgt die Behauptung für den Spezialfall $\rho_0 = 0$ aus der im Anhang a) angegebenen Funktion $(L(\psi_{gs}, \psi_{gs}))_m$.

Aus dem Verschwinden der Determinante (43) folgen n Eigenwerte $\tilde{G}^{(0)} = 0$. Die übrigen n Eigenwerte ergeben sich aus dem Verschwinden der n -reihigen Unterdeterminante im linken, oberen Viertel von (43). Zieht man aus jeder Zeile den Faktor $C_g C_g^*$ heraus und schreibt man diese Determinante als sogenanntes charakteristisches Polynom in $\tilde{G}^{(0)} \frac{M}{2}$, so ist der Koeffizient von $(\tilde{G}^{(0)} \frac{M}{2})^n$ gleich 1, und Koeffizient von $(\tilde{G}^{(0)} \frac{M}{2})^{n-2}$ ist gegeben durch die Summe aller zweireihigen Hauptminoren $T_{gs}^2 - T_{gs}^2$ und ist, wie wir eben bewiesen haben, negativ. Ein Polynom, das nur reelle Nullstellen hat und dessen Koeffizienten verschiedene Vorzeichen annehmen, hat mindestens eine positive Nullstelle. Daher existiert für $n \geq 2$ stets ein positiver Eigenwert $\tilde{G}^{(0)}$.

Im Fall $n=1$ existieren keine zweireihigen Hauptminoren, und die Determinante (43) liefert außer dem verschwindenden Eigenwert einen negativen Eigenwert, welcher im Fall "frei-frei" gleich der Hälfte des Ausdrucks (45) ist. Die übrigen Diagonalelemente lassen sich in der Form

$$(47) \quad \tilde{G}^{(0)} M + T_{gs} = \tilde{G}^{(0)} M + \frac{1}{2} (L(\psi_{11}, \psi_{1-1}))_m - (L(\psi_{1g}, \psi_{1-g}))_m$$

schreiben und liefern nur negative Eigenwerte, weil das Vorzeichen von (47) in allen Fällen negativ ist. Da zu allen Eigenwerten $\tilde{G}^{(0)}$ reelle Lösungen $\tilde{v}_2^{(0)}$ möglich sind, ergibt die Untersuchung des Gleichungssystems ohne die Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Materialeigenschaften, daß bei hinreichend kleinen Amplituden alle Lösungen instabil sind, außer der Lösung $\tilde{v}^{(0)} = \sqrt{2} \cos R_1 \omega \cdot f(z)$, die einer Strömung in der Form von rotierenden Walzen entspricht und deren höchste Anwachsrate in dieser Ordnung $\varepsilon^2 \tilde{G}^{(0)} = 0$ ist. Bevor wir untersuchen, wie diese Aussagen durch die Temperaturabhängigkeit der Materialeigenschaften modifiziert werden, wollen wir die Ordnung $(\varepsilon^4 \tilde{v}^{(0)})$ betrachten, um eine Besonderheit der Fälle mit unsymmetrischen Randbedingungen zu zeigen.

c) Die Lösbarkeitsbedingungen in der Ordnung $(\varepsilon^4 \zeta^0)$

Das stationäre Gleichungssystem der Ordnung $(\varepsilon^4 \zeta^0)$ lautet:

$$\begin{aligned} \Delta \overset{0}{v}_i + \overset{0}{v} \lambda_i - \partial_i \overset{0}{\pi} &= p_0 (\overset{0}{v}_j \partial_j \overset{0}{v}_i + \overset{20}{v}_j \partial_j \overset{20}{v}_i + \overset{30}{v}_j \partial_j \overset{30}{v}_i) \\ \Delta \overset{0}{v} + R_x \overset{0}{v}_j \lambda_j &= \overset{0}{v}_j \partial_j \overset{20}{v} + \overset{20}{v}_j \partial_j \overset{20}{v} + \overset{30}{v}_j \partial_j \overset{30}{v} - \overset{30}{R} \overset{30}{v}_j \lambda_j - \overset{20}{R} \overset{20}{v}_j \lambda_j \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung setzen wir $p_0 = 0$, - im anderen Fall würden wir qualitativ die gleichen Ergebnisse erhalten -, und bekommen für $\overset{30}{R}$ die Gleichung

$$\overset{30}{R}(\overset{0}{v}_z \overset{0}{v})_m = (\overset{0}{v}(\overset{0}{v}_j \partial_j \overset{30}{v} + \overset{20}{v}_j \partial_j \overset{20}{v} + \overset{30}{v}_j \partial_j \overset{30}{v})_m - \overset{20}{R}(\overset{20}{v}_z \overset{0}{v})_m$$

Da die Integrale $(\overset{0}{v} \overset{30}{v}_j \partial_j \overset{0}{v})_m = \frac{1}{2} (\partial_j (\overset{0}{v}_j \overset{0}{v} \overset{30}{v}))_m$ und $(\overset{0}{v} \overset{20}{v}_z)_m$ verschwinden, können wir unter Ausnutzung der Selbstadjungiertheit des homogenen Gleichungssystems folgende Vereinfachung vornehmen:

$$\begin{aligned} \overset{30}{R}(\overset{0}{v}_z \overset{0}{v})_m &= -(\overset{0}{v} \overset{30}{v}_j \partial_j \overset{0}{v})_m + (\overset{0}{v} \overset{20}{v}_j \partial_j \overset{20}{v})_m = -(\overset{0}{v} (\Delta \overset{30}{v} + R_x \overset{20}{v}_z))_m + (\overset{0}{v} \overset{20}{v}_j \partial_j \overset{20}{v})_m \\ &= -(\overset{0}{v} (\Delta \overset{30}{v} + R_x \overset{20}{v}_z))_m + (\overset{0}{v} \overset{20}{v}_j \partial_j \overset{20}{v})_m = -(\overset{0}{v} \overset{20}{v}_j \partial_j \overset{20}{v})_m + 2(\overset{0}{v} \overset{20}{v}_j \partial_j \overset{20}{v})_m \\ (48) \quad &= 2(\overset{0}{v} \overset{20}{v}_j \partial_j \overset{20}{v})_m \end{aligned}$$

In den Fällen mit symmetrischen Randbedingungen kommt in den Summanden von (48) stets eine in z antisymmetrische Funktion mit zwei symmetrischen multipliziert vor, so daß $\overset{30}{R}$ für alle Lösungen verschwindet. Das gleiche gilt für die ganz entsprechend umgeformte Lösbarkeitsbedingung des instationären Systems:

$$\begin{aligned} -\overset{30}{G}(\overset{0}{v} \overset{0}{v})_m &= -\overset{30}{R}(\overset{0}{v}_z \overset{0}{v})_m + (\overset{0}{v} \overset{20}{v}_j \partial_j \overset{20}{v})_m + (\overset{0}{v} \overset{20}{v}_j \partial_j \overset{30}{v})_m + (\overset{0}{v} \overset{30}{v}_j \partial_j \overset{20}{v})_m + (\overset{0}{v} \overset{30}{v}_j \partial_j \overset{30}{v})_m \\ (49) \quad &+ (\overset{0}{v} \overset{20}{v}_j \partial_j \overset{20}{v})_m + (\overset{0}{v} \overset{20}{v}_j \partial_j \overset{30}{v})_m + (\overset{0}{v} \overset{30}{v}_j \partial_j \overset{20}{v})_m + (\overset{0}{v} \overset{30}{v}_j \partial_j \overset{30}{v})_m \end{aligned}$$

(Zur Bezeichnung: $\overset{30}{v}$ bzw. $\overset{20}{v}$ gehen aus $\overset{0}{v}$ bzw. $\overset{0}{v}$ dadurch hervor, daß die in $\overset{0}{v}$ bzw. $\overset{0}{v}$ enthaltene Funktion $\overset{0}{v}$ durch $\overset{30}{v}$ ersetzt wird.) In den Fällen mit unsymmetrischen Randbedingungen verschwindet (48) für bestimmte Lösungen nicht. Da die x, y -Abhängigkeit der

rechten Seite von (48) durch das Produkt von fünf Funktionen w_x ($x = -n, \dots, n$) gegeben ist, wird die Lösbarkeitsbedingung (48) nur im Fall der Lösungen mit 6 oder 10 regulären $\mathcal{K}$ -Vektoren und den Überlagerungen dieser Lösungen mit einem endlichen Wert von $\overset{30}{R}$ erfüllt. Gehen wir von der Gleichung (49) zur Säkularmatrix über, indem wir die Funktionen $\overset{10}{V}$ und $\overset{20}{V}$ wie im letzten Abschnitt das Orthogonalsystem (22) durchlaufen lassen, so erhalten wir nichtverschwindende Nichtdiagonalglieder, wenn die Summe der $\mathcal{K}$ -Vektoren der Orthogonalfunktionen $\mathcal{K}_g + \mathcal{K}_e$ mit einem $\mathcal{K}$ -Vektor $\mathcal{K}_x (x = -n, \dots, n)$ der Lösung $\overset{10}{V}$ zusammen verschwindet. Der entsprechende Teil der Säkulardeterminante läßt sich außer bei der Lösung mit 6 regulären $\mathcal{K}$ -Vektoren und ihren Überlagerungen als Faktor herausziehen:

$$(50) \quad \begin{vmatrix} \overset{30}{G}M & b \\ b & \overset{20}{G}M \end{vmatrix} = 0 \quad \wedge \quad \overset{30}{G}_{g,e} M = \pm b$$

Bei beliebigem Vorzeichen von ε ergeben diese Eigenwerte einen positiven Beitrag zur Anwachsrate, wodurch zum Beispiel die Walzenlösung instabil wird. Nur bei der Lösung mit 10 regulären $\mathcal{K}$ -Vektoren ist in (50) $\overset{30}{G}M$ durch $\overset{30}{G}M - \overset{30}{R}N$ zu ersetzen, so daß die Instabilität nicht in dieser Weise gefolgert werden kann. Wir wollen diesen Fall nicht weiter untersuchen und führen auf Seite 35 die Berechnung der Eigenwerte nur für die bereits in niedrigeren Ordnungen stabilen Lösungen durch.

Da wir die analogen Verhältnisse bei der Ordnung $(\varepsilon^2 \xi^1)$ ausführlich diskutieren, begnügen wir uns dieser skizzenhaften Behandlung der Lösbarkeitsbedingungen.

Das Gleichungssystem mit Temperaturkoeffizienten

a) Die Lösungen in der Ordnung $(\epsilon^1 \zeta^1)$

Für das Gleichungssystem mit Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit gelten die inhomogenen Randbedingungen (8). Um die Selbstadjungiertheit des Operatorsystems der rechten Seite von (13) ausnutzen zu können, müssen wir in den Ordnungen $(\epsilon^1 \zeta^1)$ mit $\mu > 0$ die inhomogenen Randbedingungen eliminieren und teilen dazu den Impulsvektor $\vec{v}_i$ in zwei divergenzfreie und zur Lösung $\vec{v}_i$ orthogonale Teile $\vec{v}_i^{(1)}$ und $\vec{v}_i^{(2)}$ auf, deren einer Teil $\vec{v}_i^{(1)}$ die inhomogenen Randbedingungen befriedigt, sonst aber beliebig ist, während für den anderen Teil $\vec{v}_i^{(2)}$ das Gleichungssystem mit der durch die Summanden $-\Delta \vec{v}_i^{(2)}, -R_K \vec{v}_i^{(2)}$ erweiterten Inhomogenität zu lösen ist bei homogenen Randbedingungen.

In der Ordnung $(\epsilon^1 \zeta^1)$ lauten die Randbedingungen an der freien Grenz-ebene $\vec{v}_i = 0, \partial_z \vec{v}_{x,y} = \alpha R_K \tau \vec{v}_{x,y}$. Wir wählen $\vec{v}_i^{(1)} = \frac{\alpha}{2} R_K \tau \delta_i z \vec{v}$ und erhalten für die stationären Lösungen $\vec{v}_i^{(1)}, \vec{v}_i^{(2)}$ das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v}_i^{(1)} + \vec{v}_i^{(1)} \lambda_i - \partial_i \vec{v}_i^{(1)} &= R_K \tau (\gamma z \Delta \vec{v}_i^{(1)} + (\gamma + \alpha) \partial_i \vec{v}_i^{(1)} + 2 \delta_i z \vec{v}_i^{(1)} \lambda_i - \frac{\alpha}{2} \Delta \delta_i z \vec{v}_i^{(1)}) \\ \Delta \vec{v}_i^{(2)} + R_K \tau \vec{v}_i^{(2)} \lambda_i &= R_K \tau (\gamma z \Delta \vec{v}_i^{(2)} + 2 \eta \partial_i \vec{v}_i^{(2)} - R_K \tau z \vec{v}_i^{(2)} (\gamma + \alpha + \frac{\alpha}{2})) - \vec{v}_i^{(1)} \end{aligned} \quad (51)$$

Multipliziert man die Gleichungen mit einer beliebigen Lösung $R_K \tau \vec{v}_i^{(1)}, \vec{v}_i^{(2)}$, addiert die Gleichungen und mittelt über das Schichtvolumen, so erhält man eine Gleichung für den Eigenwert $\vec{R}$:

$$\vec{R}(\vec{v}_i^{(1)} \vec{v}_i^{(2)})_m = R_K \tau (R_K \tau \vec{v}_i^{(1)} (\gamma z \Delta \vec{v}_i^{(1)} + (\gamma + \alpha) \partial_i \vec{v}_i^{(1)} + 2 \delta_i z \vec{v}_i^{(1)} \lambda_i - \frac{\alpha}{2} \Delta \delta_i z \vec{v}_i^{(1)}) + \vec{v}_i^{(1)} (\gamma z \Delta \vec{v}_i^{(2)} + 2 \eta \partial_i \vec{v}_i^{(2)} - R_K \tau z \vec{v}_i^{(2)} (\gamma + \alpha + \frac{\alpha}{2})))_m \quad (52)$$

Da die Lösung $\vec{v}_i^{(1)}, \vec{v}_i^{(2)}$ die gleiche z-Abhängigkeit wie die Lösung $\vec{v}_i^{(1)}, \vec{v}_i^{(2)}$ besitzt, verschwindet die rechte Seite von (52) im Fall der symmetrischen Randbedingungen, weil über das Produkt einer symmetrischen mit einer antimetrischen Funktion integriert wird.

In der bisherigen Schreibweise war die Temperaturabhängigkeit der Materialeigenschaften auf die Temperatur T_0 , die im statischen Fall in der Ebene $z = 0$ herrscht, bezogen worden. Dies ist aber in den Fällen "fest-frei" und "frei-fest", in denen die Grenzebenen prakti-

scherweise bei $z = 0$ und $z = \pm \frac{1}{2}$ liegen, nicht sinnvoll. Es liegt daher nahe, in diesen Fällen die Definition zu korrigieren und die Temperaturabhängigkeit auf eine Koordinate z_0 zu beziehen, die wir folgendermaßen definieren:

$$(53) \quad \left(R_K \tau \tilde{U}_i^0(z-z_0) \left((x-\frac{x_0}{2}) \Delta \tilde{U}_i^0 + 2\delta \tilde{U}_i^0 \lambda_i \right) + \tilde{U}_i^0(z-z_0) (\eta \Delta \tilde{U}_i^0 - R_K \tilde{U}_i^0(\eta - x + \frac{x_0}{2})) \right)_m = 0$$

Durch diese Definition erreichen wir, daß $\tilde{R}^0$ auch in den Fällen "fest-frei" und "frei-fest" verschwindet, da die in (53) nicht enthaltenen Terme der rechten Seite von (52) wegen der Randbedingungen verschwinden. Die Koordinate z_0 werden wir wie bisher nicht mit-schreiben und sie uns nur bei der Betrachtung der Fälle "fest-frei" und "frei-fest" eingesetzt denken.

Wir lösen das Gleichungssystem (51) nicht, sondern zeigen, wie die Integrale, die in der folgenden Ordnung vorkommen, ohne Kenntnis der z -Abhängigkeit von $\tilde{U}^1$ berechnet werden können:

$$\begin{aligned} (54) \quad & p_0 R_K (\tilde{U}_i^0 \tilde{U}_j^0 \partial_z \tilde{U}_k^1)_m + (\tilde{U}_i^0 \tilde{U}_j^0 \partial_z \tilde{U}_k^1)_m = -p_0 R_K (\tilde{U}_i^1 \delta_i (\tilde{U}_j^0 \partial_z \tilde{U}_k^0))_m - (\tilde{U}_i^1 \tilde{U}_j^0 \partial_z \tilde{U}_k^0)_m \\ & = -R_K (\tilde{U}_i^1 (\Delta \Delta \Delta_2 \tilde{U}_j^0 - \Delta_2 \tilde{U}_j^0))_m - (\tilde{U}_i^1 (\Delta \tilde{U}_j^0 - R_K \Delta_2 \tilde{U}_j^0))_m \\ & = -R_K (\tilde{U}_i^0 (\Delta \Delta \Delta_2 \tilde{U}_j^1 - \Delta_2 \tilde{U}_j^1))_m - (\tilde{U}_i^0 (\Delta \tilde{U}_j^1 - R_K \Delta_2 \tilde{U}_j^1))_m \\ & = -R_K^2 (\tilde{U}_i^0 (x^2 \Delta \tilde{U}_j^1 + (x+\alpha) \partial_z \tilde{U}_j^1 + 2\delta \tilde{U}_j^1 \lambda_i - \frac{\alpha}{2} \Delta \delta_i z \tilde{U}_j^1))_m \\ & \quad - R_K \tau (\tilde{U}_i^0 (\eta z \Delta \tilde{U}_j^1 + 2\eta \partial_z \tilde{U}_j^1 + R_K z \Delta_2 \tilde{U}_j^1 (\eta - x + \frac{x_0}{2})))_m \end{aligned}$$

Das instationäre Gleichungssystem der Ordnung $(\varepsilon^1 \xi^1)$ für $\tilde{U}_i^1, \tilde{U}_i^1, \tilde{U}^1$ ist mit dem stationären Gleichungssystem (51) identisch, da der Eigenwert ξ^1 ebenso wie der Eigenwert ξ^0 verschwindet.

b) Die Lösbarkeitsbedingung in der Ordnung $(\varepsilon^1 \xi^1)$

In der Ordnung $(\varepsilon^2 \xi^1)$ lauten die Randbedingungen an der freien Grenz-ebene $\tilde{U}_2^1 = 0$, $\partial_z \tilde{U}_{x,y}^1 = \alpha \tau R_K \tilde{U}_{x,y}^0 - \alpha \tau \tilde{U}_{x,y}^0 \partial_z \tilde{U}^0$. Wir wählen $\tilde{U}_i^1 = \frac{\alpha \tau}{4} \delta_i (2R_K z \tilde{U}^0 - \tilde{U}^0 \tilde{U}^0)$ und erhalten für die stationäre Lösung $\tilde{U}_i^1, \tilde{U}^1$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 \Delta \overset{21}{v}_i + \overset{22}{v}_i \lambda_i - \partial_i \overset{23}{\pi} &= p_0(\overset{24}{v}_i \partial_j \overset{25}{v}_i + \overset{26}{v}_i \partial_j \overset{27}{v}_i) + R_k \tau (\gamma z \Delta \overset{28}{v}_i + (\gamma + \alpha) \partial_i \overset{29}{v}_i + 2\delta z \overset{30}{v}_i \lambda_i - \frac{\alpha}{2} \Delta \delta_i z \overset{31}{v}_i) \\
 &\quad - \gamma \tau (\partial_j (\overset{32}{v}_i \partial_i \overset{33}{v}_i) + \partial_j \overset{34}{v}_i \partial_i \overset{35}{v}_i) - \alpha \tau (\partial_j (\overset{36}{v}_i \partial_i \overset{37}{v}_i) + \overset{38}{v}_i \partial_j \partial_i \overset{39}{v}_i) - \delta \tau \overset{40}{v}_i \overset{41}{v}_i \lambda_i \\
 &\quad - \alpha p_0 R_k \tau (z \overset{42}{v}_i \partial_j \overset{43}{v}_i + \overset{44}{v}_i \partial_j \overset{45}{v}_i) + \frac{\alpha}{4} \Delta \delta_i (\overset{46}{v}_i \overset{47}{v}_i) \\
 (55) \quad \Delta \overset{48}{v} + R_k \overset{49}{v}_i \lambda_i &= -\overset{50}{R} \overset{51}{v}_i \lambda_i + \overset{52}{v}_i \partial_j \overset{53}{v}_i + \overset{54}{v}_i \partial_j \overset{55}{v}_i + R_k \tau (\gamma z \Delta \overset{56}{v} + 2\gamma \partial_i \overset{57}{v} - R_k \overset{58}{v}_i z (\gamma - \alpha + \frac{\alpha}{2})) \\
 &\quad - \gamma \tau \partial_j (\overset{59}{v} \partial_i \overset{60}{v}) - \alpha R_k \tau (z \overset{61}{v}_i \partial_j \overset{62}{v} + \overset{63}{v}_i \partial_j \overset{64}{v}) - \frac{\alpha}{4} R_k \tau \Delta_i (\overset{65}{v} \overset{66}{v})
 \end{aligned}$$

Multipliziert man das Gleichungssystem (55) mit der beliebigen Lösung der Ordnung $(\varepsilon^1 \zeta^0)$ $R_k \overset{67}{v}_i, \overset{68}{v}$, addiert die Gleichungen und integriert über das Schichtvolumen, so verschwindet die linke Seite und man erhält die Lösbarkeitsbedingung

$$(56) \quad \overset{69}{R} N(w w')_m = (F(w', w, w))_m$$

Alle Glieder der rechten Seite von (55) mit Ausnahme des Gliedes $\overset{70}{R} N(w w')_m$ haben wir in $(F(w', w, w))_m$ zusammengefaßt, da sie sich bezüglich der x, y -Abhängigkeit sämtlich als Tripelprodukte der Lösungen der Ordnung $(\varepsilon^1 \zeta^0)$ w', w, w schreiben lassen. Lassen wir die Lösung w' das Orthogonalsystem (22) durchlaufen, so liefert das Integral über die Tripelprodukte $F(w', c_\lambda w_\lambda, c_\mu w_\mu)$ nur dann einen Beitrag, wenn sich die drei $\mathcal{R}$ -Vektoren $\mathcal{R}_\lambda, \mathcal{R}_\mu$ und $\mathcal{R}_\nu$ in der Form eines gleichseitigen Dreiecks schließen lassen. Daher ist die Lösbarkeitsbedingung (56) mit $\overset{71}{R} = 0$ für jede Lösung w erfüllt, die nicht zwei, einen Winkel von $\frac{\pi}{3}$ einschließende $\mathcal{R}$ -Vektoren enthält. Enthält jedoch die Lösung w zwei solche $\mathcal{R}$ -Vektoren $\mathcal{R}_\mu$ und $\mathcal{R}_\lambda$, so ist die Bedingung (56) nur dann erfüllt, und zwar mit nicht verschwindendem Eigenwert $\overset{72}{R}$, wenn die Lösung w auch den dritten $\mathcal{R}$ -Vektor $\mathcal{R}_\nu = \mathcal{R}_\lambda \pm \mathcal{R}_\mu$ enthält und wenn außerdem die Beträge der zugehörigen Koeffizienten c_μ, c_λ, c_ν gleich sind. In diesem Fall darf die Lösung keinen weiteren $\mathcal{R}$ -Vektor $\mathcal{R}_\nu$ enthalten, zu dem nicht die beiden anderen $\mathcal{R}$ -Vektoren des durch $\mathcal{R}_\nu$ bestimmten gleichseitigen Dreiecks vorhanden sind, da sonst für $w' = w_\nu$ die rechte Seite von (56) im Gegensatz zur linken Seite verschwinden würde. Die Lösbarkeitsbedingung (56) mit nicht verschwindendem Eigenwert $\overset{73}{R}$ kann also nur von Lösungen der Form

$$(57) \quad \hat{W} = \sum_{x=1}^3 c_x e^{i R_x W} \quad \text{mit} \quad c_x c_x^* = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad \sum_{x=1}^3 R_x = 0$$

und Superpositionen $\sum_{v=1}^n d_v \hat{W}_v$ dieser Lösungen erfüllt werden. Die Möglichkeiten der Superposition werden aber durch die in den Koeffizienten d_v nicht lineare Lösbarkeitsbedingung (56) weiter eingeschränkt, weil der Wert von $\hat{R}$ nur dann konstant ist, wenn alle d_v gleich sind. Aus der Lösbarkeitsbedingung (36) folgt dann aber $\eta = 2$, da nur reguläre und halbreguläre Lösungen die Gleichungen (37) mit der Lösung (39) erfüllen. Diese Behauptung haben wir nicht bewiesen, da alle Betrachtungen im folgenden auf den Fall $n > 2$ übertragbar sind und wir nur der Einfachheit halber $\eta = 2$ voraussetzen.

Wir wollen jetzt die Lösbarkeitsbedingung (56) für die Lösung $\hat{W}$ genauer untersuchen. Durch eine geeignete Translation W_0 des Ursprungs läßt sich erreichen, daß zwei der Koeffizienten reell werden, zum Beispiel $c_1 = c_{-1}$, $c_2 = c_{-2}$. Wir rechnen nun die Lösbarkeitsbedingung (56) für den Term $(z \hat{v}_i \hat{v}_j \hat{v}_k)_m$ explizit aus, - die anderen Terme der rechten Seite von (56) zeigen das gleiche Verhalten und werden daher nur durch ... angedeutet -, und lassen w' die 6 Funktionen des Orthogonalsystems durchlaufen, für die das Integral über die Tripelprodukte nicht ohnehin verschwindet:

$$R N c_x^* = (z \delta_i w_x f \delta_j c_\lambda w_\lambda f \delta_k c_\mu w_\mu)_m + \dots = \frac{c_1 c_2 c_3}{c_x} \left(z a^4 \left(\frac{3}{2} f f' a^2 - \frac{1}{2} f f'' - f f' f'' \right) \right)_m + \dots$$

$$R N c_x = (z \delta_i w_x f \delta_j c_\lambda^* w_\lambda f \delta_k c_\mu^* w_\mu)_m + \dots = \frac{c_1 c_2 c_3^*}{c_x^*} \left(z a^4 \left(\frac{3}{2} f f' a^2 - \frac{1}{2} f f'' - f f' f'' \right) \right)_m + \dots$$

Das Indextripel (λ, λ, μ) läuft über alle Permutationen von $(1, 2, 3)$. Die 6 Gleichungen sind genau dann erfüllt, wenn auch der dritte Koeffizient reell ist: $c_3 = c_3^*$. Alle Koeffizienten c_x können positiv angenommen werden, da das Vorzeichen der Lösung durch das Vorzeichen des Entwicklungsparameters ε bestimmt wird und die Änderung des Vorzeichens des Koeffizienten $c_1 = c_{-1}$ nur eine Translation der Lösung um $W_0 = \frac{2\pi}{a} R_1$ bewirkt:

$$\begin{aligned}
 -\cos k_1 u + \cos k_2 u + \cos k_3 u &= -\cos k_1 u + 2 \cos \frac{k_2}{2} u \cdot \cos \left(\frac{k_2}{2} + k_3 \right) u \\
 &= -\cos k_1 (u - u_0) - 2 \cos \frac{k_2}{2} (u - u_0) \cdot \cos \left(\frac{k_2}{2} + k_3 \right) (u - u_0) \\
 &= -\cos k_1 (u - u_0) - \cos k_2 (u - u_0) - \cos k_3 (u - u_0)
 \end{aligned}$$

Die auf diese Weise eindeutig bestimmte Lösung der Form (37)

$$(58) \quad \hat{w} = \frac{2}{\sqrt{6}} \sum_{\kappa=1}^3 \cos k_{\kappa} u$$

nennen wir die Sechsecklösung, da sie eine Strömungsform beschreibt, welche eine regelmäßige Wabenstruktur von sechseckförmigen Zellen ausbildet. Wie Pellew & Southwell [2] gezeigt haben, werden die experimentell beobachteten Strömungszellen von sechseckigem Querschnitt in guter Näherung durch die Lösung $\hat{w}$ beschrieben. Außer dieser Sechsecklösung genügt nur die Summe von (58) und der aus (58) durch Drehung und Translation hervorgehenden Lösung den Lösbarkeitsbedingungen (56) und (36) mit nicht verschwindendem Eigenwert $\tilde{R}$. Lösungen dieser Art bezeichnen wir kurz mit "Sechsecküberlagerung".

In den instationären Gleichungen der Ordnung ($\varepsilon^2 \xi^1$) entsprechen den in w quadratischen Termen der stationären Gleichungen (55) jeweils zwei Terme, entsprechend den beiden Möglichkeiten, w durch $\tilde{w}$ zu ersetzen. Zur besseren Übersicht führen wir nur die beiden ersten dieser Terme an:

$$\begin{aligned}
 (59) \quad \Delta \tilde{v}_i + \tilde{v}^2 \lambda_i - \partial_i \tilde{\pi} &= \rho_0 \tilde{G}^{11} \tilde{v}_i + \rho_0 (\tilde{v}_j \partial_j \tilde{v}_i + \tilde{v}_j \partial_i \tilde{v}_j) + \dots \\
 \Delta \tilde{v} + R_K \tilde{v}_j \lambda_j &= \tilde{G}^{11} \tilde{v} - \tilde{R} \tilde{v}_j \lambda_j + \tilde{v}_j \partial_j \tilde{v} + \tilde{v}_j \partial_i \tilde{v} + \dots
 \end{aligned}$$

In gleicher Weise geht die Lösbarkeitsbedingung des instationären Gleichungssystems

$$(60) \quad -\tilde{G}^{11} M(w' \tilde{w})_m - \tilde{R} N(w' \tilde{w})_m = (\tilde{F}(w', \tilde{w}, w))_m$$

aus der Lösbarkeitsbedingung (56) hervor mittels der Beziehung

$$(61) \quad \tilde{F}(w', \tilde{w}, w) = F(w', \tilde{w}, w) + F(w', w, \tilde{w})$$

Läßt man w' das Orthogonalsystem (22) durchlaufen, so erhält man ein Gleichungssystem für die Koeffizienten $\tilde{C}$ von $\tilde{w}$ und kann die

Lösbarkeitsbedingung (66) durch die Forderung ersetzen, daß die Säkular determinante verschwindet. Das allgemeine Element der Säkularmatrix lautet

$$(62) \quad -\tilde{G} M \delta_{\xi\xi} + \tilde{R} N \delta_{\xi\xi} - (\tilde{F}(w_\xi, w_\xi, w))_m$$

Aus der Tatsache, daß das Integral über die Tripelprodukte nur dann nicht verschwindet, wenn die Summe der $\mathcal{R}$ -Vektoren der Funktionen w_ξ und w_ξ zusammen mit einem in der Lösung w enthaltenen $\mathcal{R}$ -Vektor Null wird, ergeben sich folgende Eigenschaften der Säkular determinante:

- I. In sämtlichen Diagonalelementen verschwindet der Term $(\tilde{F}(w_\xi, w_\xi, w))_m$
- II. Enthält die Lösung w keine $\mathcal{R}$ -Vektoren, die einen Winkel von $\frac{\pi}{3}$ miteinander einschließen, so verschwinden alle Nichtdiagonalelemente von (62), in denen die Funktion w_ξ oder die Funktion w_ξ die Schar der in der Lösung w enthaltenen Funktionen w_κ ($\kappa = -n, \dots, n$) durchläuft. Wir können daher das Produkt der zugehörigen $2n$ Diagonalelemente aus der Säkular determinante abspalten und erhalten wegen $\tilde{R} = 0$ den $2n$ -fachen Eigenwert $\tilde{G} = 0$.
- III. Ist die Lösung gleich der Sechsecklösung $\hat{w}$ oder ihrer Überlagerung, so erhält man nichtverschwindende Nichtdiagonalelemente nur dann, wenn die Funktionen w_ξ und w_ξ die Schar der in der Lösung $\hat{w}$ enthaltenen Funktionen w_κ durchläuft. Die Säkular determinante zerfällt also in zwei Teile, in die Determinante über die $2n$ -reihige Teilmatrix und das Produkt der übrigen Diagonalelemente, welche den unendlich oft entarteten Eigenwert $\tilde{G} M = \tilde{R} N$ liefern.

Die Lösbarkeitsbedingung des instationären Gleichungssystems einer Ordnung $(\xi^{v+1} \xi^u)$ ergibt zu jedem Eigenwert $\tilde{G}^u$ ein Gleichungssystem für die Koeffizienten $\tilde{C}_\xi$ der instationären Störung $\tilde{w}$ und schränkt die Schar der instationären Störungen, die bei einer stationären Lösung auftauchen können, ganz ähnlich ein, wie die Lösbarkeitsbedingungen des stationären Gleichungssystems die Schar der möglichen stationären Lösungen einschränken. Damit das Gleichungssystem auf dem Wege der Entwicklung lösbar ist, muß zu jedem Eigenwert $\tilde{G}^u$ mindestens eine Lösung existieren, deren Koeffizienten $\tilde{C}_\xi$ die Lösbarkeitsbedingungen in allen Ordnungen befriedigen. Da die Anwachs-

raten $\tilde{G}$ dieser instationären Lösungen aus den mit ε^v multiplizierten Eigenwerten $\tilde{G}^v$ zusammensetzen, ist es möglich, daß die in der Ordnung $(\varepsilon^3 \zeta^0)$ bei allen Lösungen w außer der Walzenlösung $\dot{w}$ auftretende Instabilität durch die Eigenwerte $\tilde{G}^1$ der Ordnung $(\varepsilon^1 \zeta^1)$ für hinreichend kleine Amplituden aufgehoben wird, während umgekehrt die Walzenlösung $\dot{w}$ instabil werden kann. In der Ordnung $(\varepsilon^3 \zeta^0)$ wird der positive Eigenwert $\tilde{G}^0$ und die zugehörige instationäre Störung bereits durch das n -reihige Gleichungssystem bestimmt, dessen Determinante sich aus der Säkulardeterminante abspalten läßt. Für die Lösungen w , die keine zwei einen Winkel von $\frac{\pi}{3}$ bzw. $\frac{2\pi}{3}$ einschließende $\mathcal{K}$ -Vektoren enthalten, läßt sich das entsprechende Gleichungssystem abseparieren, welches nach (I) weder die Koeffizienten $\tilde{G}_\varphi$ einschränkt noch einen Beitrag zur Anwachsrate $\tilde{G}$ liefert. Daher kann die Instabilität dieser Lösungen für kleine Amplituden nicht aufgehoben werden. Bei der Walzenlösung $\dot{w} = \sqrt{2} \{ (z) \cos \mathcal{K}_z \}$ verschwinden die Nichtdiagonalglieder von (62) nur dann nicht, wenn die Funktionen w_φ und w_ζ gerade so gewählt werden, daß der Vektor $\pm \mathcal{K}_\varphi + \mathcal{K}_\zeta + \mathcal{K}_\zeta$ Null ergibt. Das Verschwinden der Unterdeterminante mit den 4 Nichtdiagonalelementen, bei denen diese Bedingung erfüllt ist, führt zu den Eigenwerten

$$(63) \quad \tilde{G}^n M = \pm \left(\tilde{F}(w_\varphi, w_\zeta, \dot{w}) \right)_m, \quad \tilde{G}^n M = \pm \left(\tilde{F}(w_\varphi, w_\zeta, \dot{w}) \right)_m$$

Alle übrigen Nullstellen der Säkulardeterminante ergeben den Eigenwert $\tilde{G}^n = 0$. Bei hinreichend kleinen Amplituden führen die Eigenwerte (63) zur Instabilität der Walzenlösung, während die Sechsecklösung durch den Beitrag $\tilde{G}^n$ zur Anwachsrate stabil werden kann. Bevor wir diese Aussagen beweisen, wollen wir zeigen, daß die Gleichungen der Ordnungen $(\varepsilon^1 \zeta^v)$ mit $v \geq 2$ keinen Einfluß auf die Stabilität der stationären Lösungen haben.

c) Die Lösbarkeitsbedingungen in der Ordnung $(\varepsilon^1 \zeta^2)$

Wir haben die zahlreichen Glieder zweiter Ordnung in den Temperaturkoeffizienten nicht explizit berücksichtigt, da wir nur ihr qualitatives Verhalten zu diskutieren brauchen. In Analogie zu den eis-

her behandelten Lösbarkeitsbedingungen können die Lösbarkeitsbedingungen des stationären und des instationären Gleichungssystems der Ordnung $(\varepsilon^2 \zeta^2)$ in der folgenden Form geschrieben werden:

$$(64) \quad \overset{02}{R} N(w'w)_m = (G(w'w))_m$$

$$(65) \quad -\overset{02}{G} M(w'\tilde{w})_m = -\overset{02}{R} N(w'\tilde{w})_m + (\tilde{G}(w'\tilde{w}))_m$$

Da die Summanden von $\tilde{G}(w'\tilde{w})$ aus den Summanden von $G(w'w)$ hervorgehen, indem w durch $\tilde{w}$ ersetzt wird, gilt $\tilde{G}(w'w) = G(w'w)$. Bezüglich der x, y -Abhängigkeit ist $G(w'w)$ eine Summe von Produkten der Funktion w' mit der Funktion w und $(G(w'w))_m$ verschwindet, wenn w' und w orthogonal zueinander sind. Daher reduziert sich die aus der Lösbarkeitsbedingung (65) hervorgehende Säkulardeterminante auf das Produkt der Diagonalglieder, die alle den Eigenwert $\overset{02}{G} = 0$ ergeben. Die Lösbarkeitsbedingung (64) des stationären Gleichungssystems wird ebenfalls von allen Lösungen w erfüllt und bestimmt den im allgemeinen von Null verschiedenen Eigenwert $\overset{02}{R}$. Dieser ergibt einen von der Amplitude $|\varepsilon|$ unabhängigen Beitrag zur Rayleighzahl R , wie zu erwarten war, weil die Rayleighzahl nur die gemittelten Werte der Materialeigenschaften enthält und nur die lineare Temperaturabhängigkeit der Dichte berücksichtigt. Für das Problem der Zellularkonvektion hat der Beitrag $\overset{02}{R}$ zur Rayleighzahl nur eine geringe quantitative Bedeutung, und wir werden ihn daher im folgenden nicht explizit berücksichtigen. Das in diesem Abschnitt gesagte gilt in gleicher Weise für die Ordnungen $(\varepsilon^2 \zeta^2)$ mit $\nu > 2$.

Die stabilen Strömungsformen

a) Berechnung der Anwachsrate

Aus der Entwicklung des stationären Gleichungssystems der Zellularkonvektion und seiner instationären Störungen haben wir gefolgert, daß bei kleinen Amplituden $|\zeta|$ nur die Walzenlösung, die Sechsecklösung und ihre halbreguläre Überlagerungen als stabile Lösungen in Frage kommen. Wir untersuchen nun die Stabilitätsbereiche dieser Lösungen, indem wir die Anwachsrate der Sechsecklösung berechnen (I), diese mit den entsprechenden Werten der Walzenlösung vergleichen (II) und schließlich auf die Besonderheit der unsymmetrischen Fälle in der Ordnung $(\zeta^4 \xi^0)$ eingehen (III). Den Beweis für die Instabilität der Sechsecküberlagerung führen wir im Anhang b).

I. Die Eigenwerte $\tilde{G}^0$ der Sechsecklösung ergeben sich als Nullstellen der 6-reihigen Unterdeterminante (43) und der übrigen Diagonalelemente der Säkulardeterminante. Letztere ergeben stets negative Eigenwerte $\tilde{G}_\tau^0$, wie durch eine Abschätzung im Anhang a) bewiesen wird. Aus der Symmetrie der Sechsecklösung folgt, daß alle Nichtdiagonalelemente der 3-reihigen Unterdeterminante von (43) gleich sind. Wir bezeichnen daher die ersten beiden Terme von (41) zur Abkürzung mit $+\frac{1}{2}L_\Delta$, den letzten Term mit $+\frac{1}{3}L_0$ und schreiben das Diagonalelement (40) in der Form $T_{gg} = L_\Delta + \frac{1}{3}L_0$.

Die Rechnung ergibt in den Fällen

	"frei-frei"	"frei-fest" und "fest-frei" mit $p_0=0$	"fest-fest" (nach [8])
$L_0 N^{-2}$	1/2	0,60167	0,69203
$L_1 N^{-2} 10^3$	0	4,25	2,46-1,57 p_0 +2,78 p_0^2
(66) $L_\Delta N^{-2} 10^3$	189,21+45,66 p_0 +70,89 p_0^2	203,73	199,13+51,16 p_0 +65,09 p_0^2
N	$9/4 \pi^2$	105,870	30,769

Aus dem Verschwinden der Determinante (43) ergeben sich folgende Eigenwerte:

$$(67) \quad \left| \begin{array}{ccc|ccc} \frac{10}{2} \frac{M}{2} + L_1 + \frac{1}{2} L_0 & \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_0 & \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_0 & & & \\ \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_0 & \frac{10}{2} \frac{M}{2} + L_1 + \frac{1}{2} L_0 & \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_0 & & & \\ \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_0 & \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_0 & \frac{10}{2} \frac{M}{2} + L_1 + \frac{1}{2} L_0 & & & \\ & & & \frac{10}{2} \frac{M}{2} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{10}{2} \frac{M}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{10}{2} \frac{M}{2} \end{array} \right| = 0$$

$$\begin{aligned} M_{G_1}^{20} &= -2L_0 - 2L_0 - 2L_1 = -2^{20} \ddot{R}N \\ M_{G_{2,3}}^{20} &= L_0 - L_1 \\ M_{G_{4,5,6}}^{20} &= 0 \end{aligned}$$

Die Beziehung $M_{G_1}^{20} = -2^{20} \ddot{R}N$ gilt bei allen Lösungen w und folgt daraus, daß die Lösung w selbst stets eine der angepaßten instationären Störungen $\tilde{w}$ ist und die inhomogenen Glieder der instationären Gleichungen der Ordnung $(\varepsilon^1 \zeta^0)$ für $\tilde{w}=w$ in das dreifache der entsprechenden Glieder der stationären Gleichungen übergehen.

In der Ordnung $(\varepsilon^1 \zeta^1)$ hatten wir gezeigt, daß die Säkulardeterminante außerhalb der 6-reihigen Unterdeterminante, in der w_β und w_γ die in der Sechsecklösung enthaltenen Funktionen w_χ durchlaufen, nur Diagonalelemente enthält, welche den unendlichfach entarteten Eigenwert

$$M_{G_\tau}^{11} = \ddot{R}N$$

liefern. Wählt man in der 6-reihigen Unterdeterminante die Orthogonalfunktionen (42) in der durch $\sum_{\alpha=1}^6 \kappa_\alpha = 0$ bestimmten Anordnung, so erhält man folgende Gleichung für die Eigenwerte:

$$(68) \quad \left| \begin{array}{ccc|ccc} \ddot{G}M - \ddot{R}N & P & P & & & \\ P & \ddot{G}M - \ddot{R}N & P & & & \\ P & P & \ddot{G}M - \ddot{R}N & & & \\ & & & \ddot{G}M - \ddot{R}N & -P & -P \\ & & & -P & \ddot{G}M - \ddot{R}N & -P \\ & & & -P & -P & \ddot{G}M - \ddot{R}N \end{array} \right| = 0$$

$$\begin{aligned} M_{G_1}^{11} &= \ddot{R}N - 2P \\ M_{G_{2,3}}^{11} &= \ddot{R}N + P \\ M_{G_4}^{11} &= \ddot{R}N + 2P \\ M_{G_{5,6}}^{11} &= \ddot{R}N - P \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Beziehung (61) ergibt sich die Gleichheit von P und $\ddot{R}N$:

$$P = \left(\tilde{F}(w_p, w_g, \dot{w}) \right)_m = 2 \left(F(w_p, w_g, \dot{w}) \right)_m = \sqrt{6} \left(F(w_p, \dot{w}, \dot{w}) \right)_m = \ddot{R}N$$

Die Berechnung von $\ddot{R}N$ läßt sich unter Benutzung der Beziehung (54) ausführen und ergibt für

$$(69) \quad \ddot{R}N = N^2(T_1 - T_2) (A_1 \gamma + A_2 \alpha + A_3 \delta + A_4 \eta + A_5 \varkappa)$$

im Fall "frei-frei"

im Fall "frei-fest"

im Fall "fest-fest"

$A_1 =$	$0,4620 + 0 \rho_0$	$0,4766$	$0,4966$
$A_2 =$	$0,3376 - 0,0267 \rho_0$	$0,4163$	$0,4825$
$A_3 =$	$-0,9596 - 0,1066 \rho_0$	$-1,0984$	$-1,1903$
$A_4 =$	$0,4265 - 0,1066 \rho_0$	$0,4696$	$0,5258$
$A_5 =$	$-0,9063 + 0,0533 \rho_0$	$-1,0089$	$-1,1230$

Im Fall "fest-frei" erhält man die Werte des Falles "frei-fest" mit dem anderen Vorzeichen. Die Werte mit ρ_0 als Faktor haben wir nur im Fall "frei-frei" berechnet. Für die übrigen Fälle sind diese Werte ungefähr die gleichen, wie aus den Werten ohne ρ_0 als Faktor hervorgeht.

Wir haben als Orthogonalfunktionen die Funktionen (42) gewählt, damit aus der Form der den Determinanten (67) und (68) entsprechenden Gleichungssysteme zu ersehen ist, daß die instationären Störungen, welche der Lösbarkeitsbedingung (68) genügen, auch die Lösbarkeitsbedingung der Ordnung $(\varepsilon^1 \varepsilon^0)$ erfüllen. Da die Säkulardeterminanten in beiden Ordnungen sonst nur Diagonalelemente enthalten, existiert zu jedem Eigenwert $\ddot{G}_r$ mindestens eine reelle Störung, welche beiden Lösbarkeitsbedingungen genügt. Damit ist die Voraussetzung gegeben zum Vergleich der Eigenwerte, die zur gleichen instationären Störung gehören und die wir bereits entsprechend indiziert haben. Eine in einem Bereich stabile Sechsecklösung erhalten wir nur, wenn das Vorzeichen von ε entgegengesetzt zum Vorzeichen von P gewählt wird, weil in den Anwachsraten $G_v = \varepsilon \ddot{G}_v + \varepsilon^2 \ddot{G}_v$ sonst der positive Beitrag des Eigenwertes $\ddot{G}_{1,3}$ nicht kompensiert werden kann. Die folgende Tabelle gibt die Anwachsraten an und den Bereich, in dem sie negativ sind:

$$M_{G_1} = -\varepsilon \ddot{R}N - \varepsilon^2 \ddot{2} \ddot{R}N \leq 0 \quad \text{für } |\varepsilon| \geq \frac{|\ddot{R}|}{2 \ddot{R}} = |\varepsilon_A|$$

$$M_{G_{2,3}} = \varepsilon \ddot{2} \ddot{R}N + \varepsilon^2 (L_d - L_1) \leq 0 \quad \text{für } |\varepsilon| \leq \frac{2 \ddot{R}N}{L_d - L_1} = |\varepsilon_B|$$

$$M_{G_4} = \varepsilon \ddot{3} \ddot{R}N \leq 0$$

$$M_{G_{5,6}} = 0$$

$$M_{G_7} = \varepsilon \ddot{R}N + \varepsilon^2 M_{G_7}^{20} < 0$$

Im Anhang b) führen wir die analoge Betrachtung für die Sechsecküberlagerung durch und zeigen, daß diese Lösungsmannigfaltigkeit bei jeder Wahl des Vorzeichens von ε instabil ist.

II. Für die vier nicht verschwindenden Eigenwerte $\ddot{G}^{\ddot{1}}$ der Walzenlösung in der Ordnung $(\varepsilon^2 \ddot{\zeta}^1)$ gilt die Beziehung

$$(70) \quad M_{G_{7,8,9,10}}^{\ddot{1}} = \pm (\tilde{F}(w_g, w_c, \dot{w}))_m = \pm \sqrt{3} (\tilde{F}(w_g, w_c, \dot{w}))_m = \pm \sqrt{3} P$$

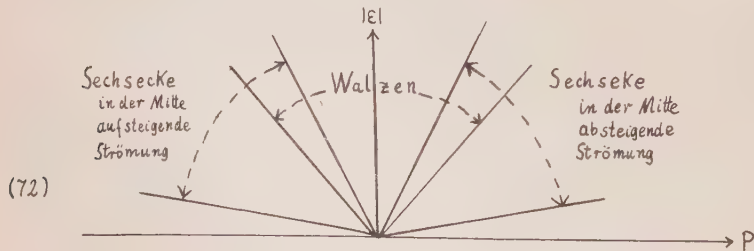
Die zugehörigen Eigenwerte der Ordnung $(\varepsilon^2 \ddot{\zeta}^0)$ ergeben sich aus dem Diagonalelement (47) und haben alle den gleichen Wert:

$$(71) \quad M_{G_{7,8,9,10}}^{20} = -\frac{3}{2} (L_d - L_1)$$

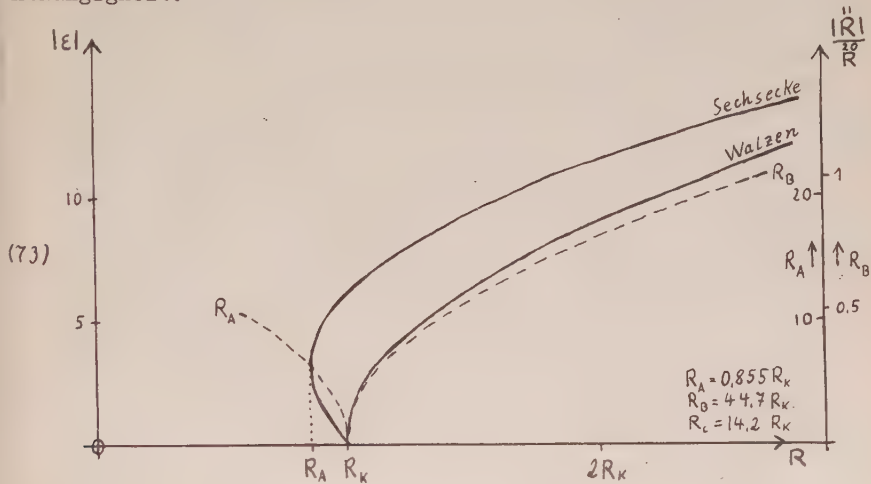
Der Eigenwert $\ddot{R}N$ für die Walzenlösung ist durch $L_0 + 3L_1$ gegeben. Die übrigen Eigenwerte interessieren nicht, da sie nicht zu positiven Anwachsrate führen, und die Stabilität der Walzenlösung wird allein durch die Werte (70) und (71) bestimmt:

$$M_{G_{7,8,9,10}} = \pm \varepsilon \sqrt{3} P - \varepsilon^2 \frac{3}{2} (L_d - L_1) \leq 0 \quad \text{für } |\varepsilon| \geq \frac{|2P|}{\sqrt{3} (L_d - L_1)} = |\varepsilon_c|$$

Tragen wir die Stabilitätsbereiche in einem Diagramm auf, so erhalten wir wegen $\sqrt{3} |\varepsilon_c| = |\varepsilon_B|$ ein Gebiet, in dem die Walzenlösung und die Sechsecklösung beide nicht instabil sind:



Unterhalb der Amplitude $|\varepsilon| = |\varepsilon_A|$ existiert keine stabile, stationäre Lösung des Problems der Zellularkonvektion. Die physikalische Bedeutung dieses Sachverhaltes wird klar, wenn wir die Abhängigkeit der Amplitude von der Rayleighzahl betrachten $R = R_K + \varepsilon \ddot{R} + \varepsilon^2 \ddot{\ddot{R}}$. In der folgenden Abbildung ist diese Abhängigkeit mit $|\ddot{R}| = 6 \ddot{\ddot{R}}$ für die Sechsecklösung und die Walzenlösung aufgetragen im Fall "fest-fest" mit $p_0 = 0$. Die anderen Fälle zeigen fast die gleiche Abhängigkeit.



Die gestrichelten Linien geben die Abhängigkeit der Stabilitätsgrenzen R_A und R_B von $\ddot{R}$ an (linke Ordinate).*) Experimentell lassen sich fast beliebige Werte von $\ddot{R}$ verwirklichen, wenn nur die Schichtdicke hinreichend klein gemacht wird.

*) In einer Wasserschicht von 2 mm Höhe und der mittleren Temperatur von 20°C wird die kritische Rayleighzahl für feste Grenzflächen bei einer Temperaturdifferenz $T_1 - T_2 = 16^\circ$ erreicht, und es ergibt sich $|\ddot{R}| = 1.2 \ddot{\ddot{R}}$. Die entsprechenden Werte für eine Luftschicht von 10 mm Höhe und der mittleren Temperatur von 20°C sind $T_1 - T_2 = 17^\circ$ und $|\ddot{R}| = 0.2 \ddot{\ddot{R}}$. Das Verhältnis (6), dessen Größe wir gegen 1 vernachlässigt haben, hat in diesem Fall den Wert $5,5 \cdot 10^{-6}$.

Sehen wir einmal davon ab, daß die gewonnenen Ergebnisse durch die höheren Ordnungen für größere Amplituden modifiziert werden, so können wir das Stabilitätsverhalten der Zellularkonvektion folgendermaßen beschreiben. Wächst die Rayleighzahl R langsam an, so bleibt die statische Schichtung bis zum Wert $R=R_K$ stabil. Oberhalb dieses Wertes tritt eine instationäre Strömung auf, die sprunghaft anwächst, - die entsprechende Anwachsrate ist von nullter Ordnung in der Amplitude - und bei dem endlichen Wert $|\epsilon| \approx |\bar{R}| \cdot \bar{R}^{30-1}$ in die stationäre Sechseckströmung übergeht. Bei einem höheren Wert R_0 der Rayleighzahl, der sehr stark von der Größe der Temperaturkoeffizienten abhängt, treten anwachsende Störungen auf, welche die Tendenz zeigen, die Sechsecklösung in eine Walzenlösung überzuführen in einer der durch die Sechsecklösung ausgezeichneten drei Richtungen. Diese Tendenz der anwachsenden Störungen, die Lösung in die stabile Lösung überzuführen, ergibt sich, wenn man die Koeffizienten aus der Säkulargleichung bestimmt, und zeigt sich besonders deutlich, wenn die Walzenlösung bei abnehmender Rayleighzahl bei $R=R_C$ instabil wird. Wird die kritische Rayleighzahl unterschritten, so bleibt die Sechseckströmung stabil und klingt erst bei Wert $R=R_A$ exponentiell ab, wie sich, daraus ergibt, daß die zu der positiven Anwachsrate G_1 gehörende Störung $\tilde{w}$ mit der Sechsecklösung $\hat{w}$ übereinstimmt.

III. In den Fällen mit symmetrischen Randbedingungen verschwinden die Eigenwerte in den nächsthöheren, in den Anwachsrate bisher nicht berücksichtigten Ordnungen $(\epsilon^4 \zeta^0), (\epsilon^3 \zeta^1), (\epsilon^2 \zeta^2)$. Bei unsymmetrischen Randbedingungen erhalten wir jedoch bereits in der Ordnung $(\epsilon^4 \zeta^0)$ Korrekturen zu den angeführten Ergebnissen. Wie aus der Diskussion der Lösbarkeitsbedingung auf Seite 25 hervorgeht, lassen sich die Eigenwerte dieser Ordnung ganz analog zur Ordnung $(\epsilon^2 \zeta^1)$ berechnen. Der Teil der Säkulardeterminante mit nichtverschwindenden Nichtdiagonalelementen lautet bei der Sechsecklösung folgendermaßen, wenn man wieder die Orthogonalfunktionen das System (42) durchlaufen läßt und die Vereinfachung $p_r=0$ berücksichtigt:

$$(75) \begin{vmatrix} {}^{30}G_M + a & b & b & & \\ b & {}^{30}G_M + a & b & & \\ b & b & {}^{30}G_M + a & & \\ & & & {}^{30}G_M + c & d & d \\ & & & d & {}^{30}G_M + c & d \\ & & & d & d & {}^{30}G_M + c \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} M_{G_1}^{30} &= -a - 2b = -114,3 \\ M_{G_{2,3}}^{30} &= -a + b = +44,15 \\ M_{G_4}^{30} &= -c - 2d = +124,0 \\ M_{G_{5,6}}^{30} &= -c + d = 0 \end{aligned}$$

Die übrigen Elemente der Säkular determinante liefern den unendlich-fach entarteten Eigenwert

$$M_{G_T}^{30} = R_N^{30} = +38,1$$

Bei der Walzenlösung erhält man vier von Null verschiedene Eigenwerte:

$$M_{G_{7,8}}^{30} = \pm 36,5, \quad M_{G_{9,10}}^{30} = \pm 36,5$$

Die berechneten Werte stimmen in den Fällen "frei-fest" und "fest-frei" überein. Wählt man das Vorzeichen von ε negativ, so werden die Anwachsraten der Sechsecklösung auch ohne Berücksichtigung der Temperaturkoeffizienten in einem bestimmten Bereich nicht positiv:

$$G_1 = \varepsilon^2 G_1^{20} + \varepsilon^3 G_1^{30} \leq 0 \quad \text{für } R \leq R_D = 10,2 R_K$$

$$G_{2,3} = \varepsilon^2 G_{2,3}^{20} + \varepsilon^3 G_{2,3}^{30} \leq 0 \quad \text{für } R \geq R_E = 3,40 R_K$$

$$G_4 = \varepsilon^3 G_4^{30} < 0$$

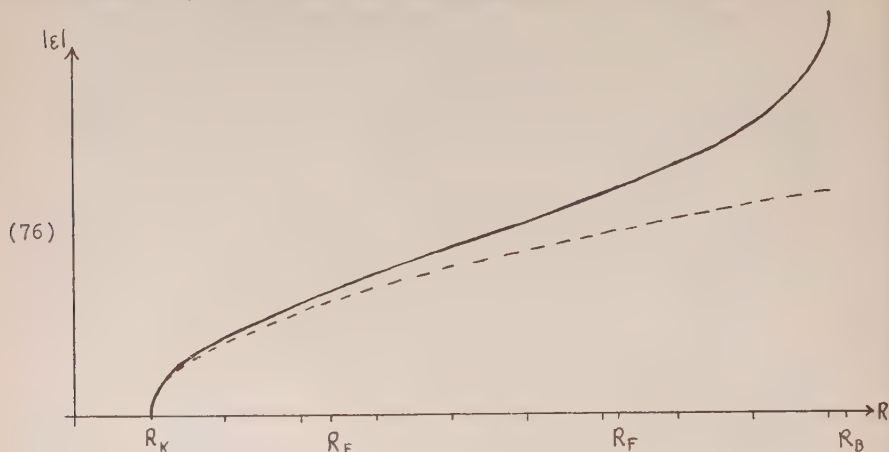
$$G_{5,6} = 0$$

$$G_T = \varepsilon^2 G_T^{20} + \varepsilon^3 G_T^{30} < 0$$

Der Bereich der Stabilität der Walzenlösung ist folgendermaßen beschränkt:

$$\mathcal{G}_{\chi, \eta} = \varepsilon^2 \mathcal{G}_{\chi, \eta}^{(2)} + \varepsilon^3 \mathcal{G}_{\chi, \eta}^{(3)} \leq 0 \quad \text{für} \quad R \geq R_F = 7,2 R_K$$

In der folgenden Figur sind diese Ergebnisse dargestellt. Da bereits die nächsthöhere Ordnung nichtverschwindende Beiträge ergibt, ist zu erwarten, daß nur dort, wo die Kurve nicht wesentlich von der Parabel abweicht, die Ergebnisse näherungsweise richtig sind.



Die Unsymmetrie der Randbedingungen führt also ebenso wie die Unsymmetrie der Materialeigenschaften zur Stabilität der Sechsecklösung, und zwar ist im Fall "frei-fest" die in der Mitte der Sechseckzelle abwärtsgerichtete, im Fall "fest-frei" die aufwärtsgerichtete Strömung stabil, da hier die z -Abhängigkeit der Lösung negativ vorausgesetzt ist. Die Walzenlösung dagegen, bei der die Richtungs- umkehr der Strömung zur gleichen, nur verschobenen Lösung führt, wird instabil.

b) Die Zellgröße der stabilen Strömungsformen

In der Ordnung $(\varepsilon^1 \xi^0)$ hatten wir den Eigenwert $\overset{00}{R}$ gleich seinem minimalen Wert R_K gesetzt und damit den Parameter a der stationären Lösung festgelegt: $a = a_K$. Die Untersuchungen in den höheren Ordnungen machte jedoch von dieser Festlegung keinen Gebrauch. Bis auf geringe quantitative Änderungen ergibt die Rechnung für $a \neq a_K$ die gleichen Resultate, wenn nur der Parameter $\tilde{a}$ der instationären Störung den gleichen Wert hat wie a . In dem Fall $a \neq a_K$ treten dagegen Störungen mit $\overset{00}{G} > 0$ auf. Wir wollen im folgenden zeigen, daß bei endlicher Amplitude trotzdem stationäre Lösungen mit $a \neq a_K$ stabil sein können. Außerdem ist zu zeigen, daß die bisher vernachlässigten Störungen mit $\overset{00}{G} < 0$, welche bei allen Werten von a auftreten können, nicht zur Instabilität führen. Wir untersuchen daher bei stationären Lösungen mit beliebigem Wert a die Anwachsraten der Störungen mit $\tilde{a} \neq a$ und beschränken uns bei der Rechnung auf die erste nichtverschwindende Ordnung in $a - \tilde{a}$.

In der Ordnung $(\varepsilon^2 \xi^0)$ verschwinden in den Fällen der symmetrischen Randbedingungen die Eigenwerte für beliebige Werte der Parameter a und $\tilde{a}$, weil die Integrale

$$(\overset{00}{V}_i \overset{00}{V}_j \partial, \overset{00}{V}_i)_{\tilde{m}}, (\overset{00}{V}'_i \overset{00}{V}_j \partial, \overset{00}{V}'_i)_{\tilde{m}}, (\overset{00}{V}'_i (\overset{00}{V}_j \partial, \overset{00}{V}_i + \overset{00}{V}_j \partial, \overset{00}{V}_i))_{\tilde{m}}, (\overset{00}{V}'_i (\overset{00}{V}_j \partial, \overset{00}{V}'_i + \overset{00}{V}_j \partial, \overset{00}{V}'_i))_{\tilde{m}}$$

wegen der Symmetrie der z -Abhängigkeit Null ergeben. In den Fällen mit unsymmetrischen Randbedingungen ist dies nicht der Fall, wie wir weiter unten sehen werden.

In der Ordnung $(\varepsilon^3 \xi^0)$ bekommen wir für $\tilde{a} \neq a$ eine Säkularmatrix von anderer Form als bisher, indem die $2n$ -reihige Teilmatrix mit nichtverschwindenden Diagonalelementen sich zu einer $2n(2n-1)$ -reihigen Matrix ausweitet, in welcher in jeder Zeile und Spalte nur ein einziges Nichtdiagonalelement von Null verschieden ist. Nach wie vor entspricht jeder Summe von 2 R -Vektoren R_x, R_λ ($x, \lambda = -n, \dots, -1, 1, \dots, n$) genau ein Nichtdiagonalelement, in dem die Summe der R -Vektoren $\tilde{R}_x, \tilde{R}_\lambda$ der Orthogonalfunktionen $\tilde{w}_x, \tilde{w}_\lambda$ den negativen Wert von $R_x + R_\lambda$ ergibt. (Nur im Fall $\tilde{a} < a$ kann es vorkommen, daß zu dem Vektor $-(R_x + R_\lambda)$ keine gleichgroße Summe $\tilde{R}_x + \tilde{R}_\lambda$ existiert.) Da nun aber

die Orthogonalfunktionen, wie wir durch die Tilde angedeutet haben, nicht mehr zum Parameterwert a der Funktionen w_κ ($\kappa = -n, \dots, -1, 1, \dots, n$), sondern zum Wert $\tilde{a}$ gehören, ist die Beziehung $\kappa_\kappa + \kappa_\lambda + \tilde{\kappa}_3 + \tilde{\kappa}_6 = 0$ im allgemeinen höchstens einmal für $\tilde{w}_3$ oder $\tilde{w}_6$ erfüllt, wenn die Indizes κ, λ ihren Bereich durchlaufen. Dies gilt insbesondere im Grenzfall $\tilde{a} \rightarrow a$, auf den wir uns im Rahmen unserer Näherung beschränken. Für diesen Fall haben wir keine neuen Integrale zu berechnen, sondern können die Ausdrücke der früheren Behandlung dieser Ordnung übernehmen, wobei sich die Unstetigkeit der Matrixelemente (40), (41) an der Stelle $\tilde{a}=a$ darin äußert, daß ein Teil der Integrale verschwindet. Die Säkulardeterminante läßt sich also zerlegen in das Produkt der $n(n-1)$ 2-reihigen Unterdeterminanten und der übrigen Diagonalglieder, welche nicht interessieren, da sich dort gegenüber dem bisherigen nichts ändert. Das Diagonalelement $\tilde{T}_{33}$ und das Nichtdiagonalelement $\tilde{T}_{36}$ der 2-reihigen Unterdeterminanten haben die folgende Form:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{33} &= -2c_\kappa c_\lambda^* \left(w_\kappa \tilde{w}_3^* L(\varphi_{\kappa-3}, \varphi_{3-\kappa}) \tilde{w}_3 w_\lambda^* \right)_m - c_\kappa c_\lambda^* \left(w_\kappa^* \tilde{w}_3^* L(\varphi_{\kappa-3}, \varphi_{3-\kappa}) \tilde{w}_3 w_\lambda \right)_m \\ \tilde{T}_{36} &= -2c_\kappa^* c_\lambda^* \left(w_\kappa^* \tilde{w}_6^* L(\varphi_{\kappa-6}, \varphi_{6-\kappa}) \tilde{w}_3 w_\lambda^* \right)_m - 2c_\kappa^* c_\lambda^* \left(w_\kappa^* \tilde{w}_3^* L(\varphi_{\kappa-2}, \varphi_{2-\kappa}) \tilde{w}_6 w_\lambda^* \right)_m\end{aligned}$$

Wenn $\kappa=\lambda$ ist, ist die letzte 2 durch eine 1 zu ersetzen. Im Fall der Sechsecklösung ergeben sich hieraus die vier verschiedenen Eigenwerte

$$(78) \quad \begin{aligned} M_{\tilde{G}_{1,3,\dots,23}}^{20} &= -\frac{1}{3}L_0 - L_1 - \frac{1}{2}L_2, & M_{\tilde{G}_{2,5,27,29}}^{20} &= \begin{cases} -\frac{2}{3}L_0 - 2L_1 & \text{für } \tilde{a} > a \\ -\frac{1}{3}L_0 - L_1 & \text{für } \tilde{a} < a \end{cases} \\ M_{\tilde{G}_{2,4,\dots,24}}^{20} &= -\frac{1}{3}L_0 - L_1 + \frac{1}{2}L_2, & M_{\tilde{G}_{26,28,30}}^{20} &= \begin{cases} 0 & \text{für } \tilde{a} > a \\ -\frac{1}{3}L_0 - L_1 & \text{für } \tilde{a} < a \end{cases}\end{aligned}$$

mit den in (66) angegebenen Werten von L_0, L_1, L_2 .

Bei der Walzenlösung erhalten wir zwei Eigenwerte:

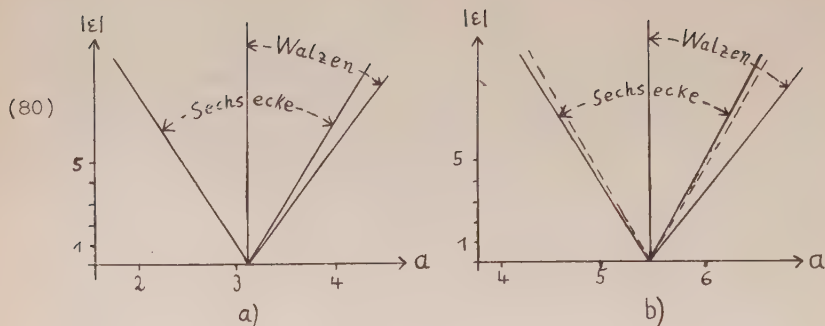
$$M_{\tilde{G}_1}^{20} = \begin{cases} -2L_0 - 6L_1 & \text{für } \tilde{a} > a \\ -L_0 - 3L_1 & \text{für } \tilde{a} < a \end{cases}, \quad M_{\tilde{G}_2}^{20} = \begin{cases} 0 & \text{für } \tilde{a} > a \\ -L_0 - 3L_1 & \text{für } \tilde{a} < a \end{cases},$$

Aus Symmetriegründen treten in der Ordnung $(\epsilon^1 \xi^1)$ keine nichtverschwindenden Eigenwerte $\tilde{G}^{11}$ auf. In der Ordnung $(\epsilon^1 \xi^1)$ spaltet die Säkulardeterminante der Sechsecklösung in gleicher Weise auf wie in der Ordnung $(\epsilon^3 \xi^0)$:

$$(79) \quad M_{\tilde{G}_{2,3,\dots,11}}^{\circ} = \ddot{R}N - P = 0, \quad M_{\tilde{G}_{2,4,\dots,12}}^{\circ} = \ddot{R}N + P = 2P, \quad M_{\tilde{G}_{13,\dots,30}}^{\circ} = \ddot{R}N$$

Für die Walzenlösung erhält man die gleichen Eigenwerte wie sie für $a = \tilde{a}$ in (71) angegeben sind. Der Vergleich der zu derselben Anwachsrate gehörenden Eigenwerte (78) und (79) zeigt, daß die Stabilitätsbereiche der "angepaßten" Störungen mit $a = \tilde{a}$ nicht eingeschränkt werden. Nur wenn $|a - a_k|$ genügend groß wird, kann ein positiver Beitrag von $\tilde{G}$ zur Anwachsrate $\tilde{G}$ zu einer zusätzlichen Instabilität führen. Der höchste Wert von $\tilde{G}M$ ist näherungsweise durch $\ddot{R}N - R_k N$ gegeben. In der Umgebung von a_k läßt sich die Abhängigkeit des Eigenwertes $\ddot{R}$ von a durch eine Parabel approximieren: $\ddot{R} = R_k + r(a - a_k)^2$, wobei r folgende nach Angaben in [7] berechnete Werte hat:

Im Fall "frei-frei" $r=175$, "fest-fest" $r=255$, "fest-frei" $r=865$. Mit Hilfe dieser Werte kann man näherungsweise den Bereich des Parameters a der stabilen stationären Lösung ausrechnen, der, wie sich zeigt, sehr schmal ist. In der Figur (80a) werden die Ergebnisse veranschaulicht für den Fall "fest-fest" mit $p_0 = 0$. Dabei sind die bereits früher diskutierten Stabilitätsgrenzen unberücksichtigt gelassen. Bei der Walzenlösung verschwindet für $\tilde{a} > a$ der Beitrag $\varepsilon^2 \tilde{G}_2 + \varepsilon \tilde{G}_2$ zu Anwachsrate, so daß Lösungen mit $a < a_k$ instabil sind. Bei der Sechsecklösung gibt für $\tilde{G}_{2,4,\dots,30} = 0$ der zugehörige Eigenwert der Ordnung $(\varepsilon^2 \zeta^1)$ einen negativen Beitrag zur Anwachsrate, so daß die Unsymmetrie bezüglich a_k wenigstens in dem Amplitudenbereich, indem die Sechsecklösung stabil ist, aufgehoben wird. Im übrigen werden die Grenzen durch den kleinsten Eigenwert $\tilde{G}$ bestimmt. (Bei der Sechsecklösung ist dies $\tilde{G}_{2,4,\dots}$ bei der Walzenlösung ist es der Eigenwert der Störung mit $(k_3, k_4) = 0$).



In den Fällen mit unsymmetrischer z -Abhängigkeit der Lösung $\hat{v}^{10}$ verschwindet in der Ordnung $(\varepsilon^2 \xi^0)$ der Eigenwert $\hat{R}^{11}$ bei beliebigem α , die Integrale der instationären Lösbarkeitsbedingung aber geben einen Beitrag, falls $\tilde{\alpha} \neq \alpha$ ist. Das allgemeine Element der Säkular-determinante lautet für $p_0 = 0$

$$M_{\tilde{\mathcal{G}}_g}^{10} \delta_g + (\tilde{w}_g g \delta; \tilde{w}_g f \cdot \partial_j w g)_m + (\tilde{w}_g g \delta; w f \cdot \partial_j \tilde{w}_g g)_m,$$

wobei aus der Beziehung (34) folgt, daß der letzte Term verschwindet. Der zweite Term liefert genau dann einen Beitrag, wenn die Summe der drei $\mathcal{K}$ -Vektoren $\tilde{\mathcal{K}}_g + \tilde{\mathcal{K}}_g + \mathcal{K}_x$ verschwindet:

$$(\tilde{w}_g g \delta; \tilde{w}_g f \cdot \partial_j w g)_m = \frac{1}{\sqrt{6}} \left((\tilde{\alpha}^2 f g' - \mathcal{K}_x \tilde{\mathcal{K}}_g f' g) \right)_m = -q(a - \tilde{\alpha})$$

(Die Integration ergibt im Fall "fest-frei" und im Fall "frei-fest" den gleichen Wert q .)

Die Säkular-determinante hat daher die gleiche Gestalt wie in der Ordnung $(\varepsilon^2 \xi^1)$ und man erhält für die Sechsecklösung die Eigenwerte

$$(81) \quad M_{\tilde{\mathcal{G}}_{1,3,\dots,11}}^{10} = q(a - \tilde{\alpha}), \quad M_{\tilde{\mathcal{G}}_{2,4,\dots,12}}^{10} = -q(a - \tilde{\alpha})$$

und für die Walzenlösung

$$(82) \quad M_{\tilde{\mathcal{G}}_{7,8,9,10}}^{10} = \pm \sqrt{3} q(a - \tilde{\alpha})$$

während die übrigen Eigenwerte verschwinden. Obwohl beide Vorzeichen auftreten, führen die Beiträge dieser Eigenwerte in den Anwachsrate nicht zu neuen Instabilitäten, da $qN^{-1} = 11.2$ klein gegenüber 1 ist. Für $a = a_k$ ist die kritische Anwachsrate der Walzenlösung

$$M\tilde{G}_{1,1} = -\frac{3}{2}\varepsilon^2(L_A - L_A) + \varepsilon(\tilde{a} - a_k)\sqrt{3}q - (\tilde{a} - a_k)^2 \cdot rN$$

negativ definit und kann nur durch den hier nicht berücksichtigten Beitrag der Ordnung $(\varepsilon^2\zeta^1)$ positiv werden. Bei der Sechsecklösung bewirken die Beiträge der Eigenwerte (81) zur Anwachsrate, qualitativ gesprochen, daß die Stabilitätsgrenzen in (80) im Fall "fest-frei" und im Fall "frei-fest" sich bei negativem ε etwas in das Gebiet $a < a_k$ verschieben, wie es in der Figur (80 b) angegeben ist. Bei positivem ε geschieht das gleiche in der Richtung $a > a_k$.

c) Vergleich mit dem Experiment

Die experimentellen Anordnungen zur Erzeugung der Zellularkonvektion unterscheiden sich von den Voraussetzungen der Theorie dadurch, daß die Konvektionsschicht stets horizontal begrenzt ist und die Konstanz der Temperatur auf den Randflächen nur angenähert erfüllt wird. Es ist daher verständlich, daß die beobachteten Strömungszellen einzeln sehr gut durch die Sechsecklösung beschrieben werden können, die periodische Anordnung aber meistens fehlt. Nur bei kleinen Schichtdicken, wenn die zur Sechsecklösung führenden Störungen besonders große Anwachsrate haben, konnte Benard [1] nach längerer Zeit die regelmäßige Wabenstruktur beobachten. Wir wollen nun die einzelnen Ergebnisse der Theorie mit dem Experiment vergleichen und diskutieren zunächst die Abhängigkeit der Strömungsrichtung in den Sechseckzellen von den Temperaturkoeffizienten (I) und behandeln dann den Übergang zur walzenförmigen Konvektion (II) und den konvektiven Wärmetransport (III).

I. Die sechseckförmigen Strömungszellen zeigen in Gasen und in Flüssigkeiten den charakteristischen Unterschied, daß bei Gasen die Strömung in der Mitte der Zelle absteigt und am Rand aufsteigt, bei

Flüssigkeiten dagegen umgekehrt verläuft. Durch Experimente an flüssigem Schwefel zeigte v.Tippelskirch [9], daß dieser Unterschied auf das verschiedene Vorzeichen des Temperaturkoeffizienten der Viskosität bei Gasen und bei Flüssigkeiten zurückzuführen ist. Dieses Ergebnis wird durch die Theorie bestätigt, wobei die Wirkung des Koeffizienten γ durch den im gleichen Sinne wirkenden Koeffizienten δ unterstützt wird, während die übrigen Koeffizienten im allgemeinen kleinere Beiträge liefern. Daß nicht nur die Temperaturabhängigkeit der Viskosität über das Vorzeichen der Strömung entscheidet, geht aus den Experimenten von v.Tippelskirch [10] an Tabakrauch-Aerosol hervor: Durch die Verdunstung und Kondensation der hauptsächlich aus Wasser bestehenden Tröpfchen ergibt sich ein zur Wärmeleitung analoger zusätzlicher Wärmetransport durch Diffusion, der eine stark negative Temperaturabhängigkeit besitzt und bei genügender Konzentration der Flüssigkeitströpfchen zur Umkehr des Vorzeichens von (69) führt, wodurch das Auftreten der "Flüssigkeitszellen" anstelle der erwarteten "Gaszellen" erklärt wird.

II. Die Experimente an dem Aerosol aus langsam alterndem Tabakrauch wurden bei symmetrischen Randbedingungen ausgeführt und zeigen beim Übergang von "Flüssigkeitszellen" zu "Gaszellen" das Auftreten der walzenförmigen Konvektion in Übereinstimmung mit der Theorie. Die ebenfalls in dem symmetrischen Fall "fest-fest" an Flüssigkeiten ausgeführten Beobachtungen der Zellularkonvektion von P.L. Silveston [11] zeigen deutlich den Übergang von Sechseckzellen zu walzenförmiger Konvektion bei wachsender Rayleighzahl. Die meisten Beobachtungen der Konvektionsströmungen wurden bei freier Oberfläche der Flüssigkeitsschicht gemacht und zeigen nur Sechseckzellen mit in der Mitte aufsteigender Strömung, welche der Theorie nach auch bei höheren Amplituden stabiler sind als die walzenförmige Konvektion. Der Einfluß der Unsymmetrie der Randbedingungen des Impulsvektors wird dabei durch die Unsymmetrie der Temperaturrandbedingungen verstärkt. Auf Seite 54 zeigen wir nämlich, daß das Problem in gleicher Weise wie bisher gelöst werden kann, wenn die Wärmeleitfähigkeit im angrenzenden Medium nicht unendlich groß angenommen werden kann. Die Funktion $q(z)$ ändert sich dabei in der Weise, daß die

Unsymmetrie des Falles "fest-frei" verstärkt wird, wenn am freien Rand ein Medium mit schlechterer Wärmeleitfähigkeit angrenzt als am festen Rand, wie es bei den Experimenten im allgemeinen der Fall ist. Bei Rayleighzahlen von einigen 10^4 werden die Konvektionsströmungen instationär, was die Theorie in der betrachteten Näherung nicht erklärt, da dort ihre Gültigkeitsgrenze sicher weit überschritten ist.

III. Die auf Seite 40 diskutierte "Hysteresese" der Zellularkonvektion, die sich in dem verschiedenen Wert der Rayleighzahl beim Einsetzen und beim Abklingen der Konvektion äußert, ist anscheinend bisher nicht beobachtet worden. Ein Bild der Abhängigkeit der Amplitude $|\xi|$ von der Rayleighzahl geben die Messungen des Wärmetransportes, die von verschiedenen Autoren im Fall "fest-fest" durchgeführt wurden. In der dimensionslosen Schreibweise ist der Wärmetransport durch Leitung durch die Rayleighzahl gegeben. Den durch Konvektion bedingten Wärmetransport H erhält man als Integrationskonstante, wenn man die 4. Gleichung von (13) über die x, y -Abhängigkeit mittelt und nach z integriert. In der niedrigsten nicht verschwindenden Ordnung ist der Wärmetransport H zum Quadrat der Amplitude proportional:

$$H = \varepsilon^2 \left(-\partial_z^2 \bar{\vartheta} + \bar{v}_z^2 \bar{\vartheta} \right) = \varepsilon^2 \left(\bar{v}_z^2 \bar{\vartheta} \right)_m$$

Das Charakteristische des in der Abhängigkeit von der Rayleighzahl gemessenen Wärmetransportes ist, daß er gemäß der Wärmeleitungsgleichung bis zur kritischen Rayleighzahl R_k linear ansteigt, dort einen Knick hat und mit stärkerer Steigung weiter linear ansteigt. Nach der Theorie ist dies Verhalten erst asymptotisch zu erwarten, wenn εR klein gegen $\varepsilon R^{\frac{10}{3}}$ wird. Die Messungen von Schmidt u. Milverton [5] und Malkus [4] zeigen allerdings auch keinen scharfen Knick, die Messungenauigkeit ist jedoch zu groß und εR ist gegenüber $R^{\frac{10}{3}}$ zu klein, um zu eindeutigen Aussagen zu gelangen. Ohne Berücksichtigung der Temperaturkoeffizienten ist das Verhältnis des Anstiegs des konvektiven Wärmetransportes mit der Rayleighzahl zum Anstieg des Wärmetransportes durch Leitung in der betrachteten Näherung durch $N^2 R^{\frac{10}{3}-1}$ gegeben. Diese Größe hat im Fall "fest-fest"

bei Vernachlässigung der Glieder mit ρ , den Betrag

1,430	für die Walzenlösung,
1,119	für die Sechsecklösung.

Die experimentellen Ergebnisse liegen bei diesen Werten, doch ist die Streuung der Meßwerte zu groß, um zwischen den beiden Strömungstypen entscheiden zu können.

Die Ableitung der Stabilitätsaussagen aus einem Extremalprinzip

In dem stationären nichtlinearen Randwertproblem, dessen linearisierte Entwicklung wir betrachtet haben, hängt der Wert des Parameters R von den sich in der x, y -Abhängigkeit unterscheidenden Lösungen ab. Außerdem ist R für eine bestimmte Lösung eine Funktion der Amplitude. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß R für die stabile Lösung bei gegebener Amplitude $|\varepsilon|$ einen minimalen Wert annimmt.

Wir betrachten zunächst das Gleichungssystem ohne Temperaturkoeffizienten mit $R = R_K + \varepsilon \overset{10}{R} + \varepsilon \overset{20}{R}$. Die Gesamtheit der stationären Lösungen wird gegeben durch die Gesamtheit der Koeffizienten C_v in dem Ausdruck

$$\overset{10}{v} = w f(z) = \sum_v C_v w_v f(z)$$

wobei w_v das Orthogonalsystem (22) durchläuft. Da R_K für alle Lösungen gleich ist, und $\overset{10}{R}$ stets verschwindet, haben wir zu untersuchen, bei welcher Lösung $\overset{20}{R}$ ein Minimum annimmt. Die Bedingung der konstanten Amplitude berücksichtigen wir durch die Nebenbedingung $\sum_v C_v C_v^* (fg)_m = N = \text{const.}$. Durch Multiplikation des Gleichungssystems (34) mit $R_K \delta_i \overset{10}{v}, \overset{10}{v}$ und Mittelung der addierten Gleichungen über das Schichtvolumen erhalten wir $\overset{20}{R}$ als Funktion der Variablen C_v :

$$(84) \quad \overset{20}{R} N = - \left(\sum_{x, \lambda, \mu, v} C_x C_\lambda w_x w_\lambda L(\varphi_{x\lambda}, \varphi_{\mu v}) C_\mu C_v w_\mu w_v \right)_m$$

Das Verschwinden der partiellen Ableitungen nach C_v ist die notwendige Bedingung für ein Extremum von $\overset{20}{R}$, nachdem zur Berücksichtigung der Nebenbedingung der Term $\lambda \sum_\mu C_\mu C_\mu^*$ mit dem Lagrange-schen Multiplikator λ hinzugefügt worden ist:

$$(85) \quad 0 = -4 \left(\sum_{x, \lambda, \mu} C_x C_\lambda w_x w_\lambda L(\varphi_{x\lambda}, \varphi_{\mu v}) C_\mu C_v w_\mu w_v \right)_m$$

Bei der Differentiation haben wir benutzt, daß die rechte Seite von (84) eine vierfach lineare homogene Form in den Variablen ist:

$$\varphi_{x\lambda} = \varphi_{\lambda x} \quad , \quad \left(L(\varphi_{x\lambda}, \varphi_{\mu v}) \right)_m = \left(L(\varphi_{\mu v}, \varphi_{x\lambda}) \right)_m$$

Die so erhaltene Bedingung für ein Extremum von $\overset{20}{R}$ ist gleichbedeutend mit der Lösbarkeitsbedingung des Gleichungssystems in der Ordnung $(\varepsilon^3 \zeta^0)$, die wir in (36) für den Fall, daß nur endlich viele C_r von Null verschieden sind, angegeben haben. Der Vergleich zeigt auch, daß $\lambda = 2\overset{20}{R}N$ ist, wobei $\overset{20}{R}$ jetzt der Zahlenwert der Funktion $\overset{20}{R}$ an der Stelle des Extremums ist. Die hinreichende Bedingung für ein Minimum von $\overset{20}{R}$ ist, daß neben dem Verschwinden der ersten partiellen Ableitungen die quadratische Form mit den zweiten partiellen Ableitungen als Koeffizienten positiv definit ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Matrix dieser Koeffizienten nur positive Eigenwerte τ_g besitzt. Da die zweite partielle Ableitung von (84)

$$-4 \left(\sum_{\kappa, \lambda} C_{\kappa} C_{\lambda} w_{\kappa\lambda} w_{\lambda} L(\psi_{\kappa\lambda}, \psi_{\mu\nu}) w_{\mu} w_{\nu} \right)_m - 8 \left(\sum_{\kappa, \lambda} C_{\kappa} w_{\kappa} w_{\mu} L(\psi_{\kappa\mu}, \psi_{\lambda\nu}) C_{\lambda} w_{\lambda} w_{\nu} \right)_m - 4 \overset{20}{R} N \delta_{\mu\nu}$$

mit dem Matrixelement (39) bis auf den Faktor 4 übereinstimmt, ist $\tau_g = -4M \overset{20}{G}_g$ und $\overset{20}{R}$ nimmt ein Minimum an, wenn sämtliche Anwachsrate der Störungen einer der Lösbarkeitsbedingung (36) genügenden Lösung negativ sind. Verschwindet die höchste Anwachsrate, so ist die quadratische Form semidefinit, und wir erhalten ein "schwaches" Minimum von $\overset{20}{R}$. In den höheren Ordnungen können die zu (84) analogen Gleichungen für $\overset{20}{R}$ nach der Differentiation nach C_r weitere Einschränkungen der notwendigen Bedingung (85) geben. Die Homogenität der Gleichungen in den Variablen C_r und damit die Äquivalenz mit der Lösbarkeitsbedingung der betreffenden Ordnung kann jedoch nicht in allgemeiner Form nachgewiesen werden. Für die regulären bzw. halbregulären Lösungen ist diese Äquivalenz vorhanden, und die Identität der Matrix der zweiten partiellen Ableitungen mit der Säkularmatrix folgt in der gleichen Weise, wie wir es für $\overset{20}{R}$ bewiesen haben. Diese Aussagen gelten auch für das Gleichungssystem mit Temperaturkoeffizienten. Wir beschränken uns darauf, die in der Ordnung $(\varepsilon^1 \zeta^1)$ gewonnenen Stabilitätsaussagen aus dem Extremalprinzip abzuleiten. Damit

$$\varepsilon \overset{11}{R} N = \varepsilon (F(w, w, w))_m$$

einen minimalen Wert annimmt, müssen die partiellen Ableitungen nach C_r verschwinden. Da die rechte Seite eine homogene Funktion

der Variablen C_v ist, bekommen wir bis auf den Faktor 3 die Lösbarkeitsbedingung der Ordnung $(\varepsilon^2 \zeta^4)$. Diese Bedingung ist hinreichend für ein Minimum von $\varepsilon \ddot{R}$, wenn außerdem die Eigenwerte der Matrix der zweiten partiellen Ableitungen positiv sind. Diese sind aber bis auf den Faktor 3 mit den Anwachsrate $\varepsilon \ddot{G}$ identisch, wie der Vergleich mit (61) und (62) zeigt.

Da R für eine stabile Lösung eine monotone Funktion der Amplitude ist, kann das Extremalprinzip auch folgendermaßen formuliert werden: Bei gegebener Rayleighzahl nimmt die Amplitude der stabilen Lösung ein Maximum an. Ebenso wie die Amplitude werden auch andere physikalische Größen maximal, wie der konvektive Wärmetransport oder die durch Konvektion entstehende Erniedrigung der potentiellen Energie, die beide in der betrachteten Näherung zum Quadrat der Amplitude proportional sind. *)

*) In ihrer Arbeit [4] leiten Malkus u. Veronis die Größe des Wärmetransportes als "relatives" Stabilitätskriterium ab, wobei sie allerdings nur eine beschränkte Klasse von Störungen betrachten, welche die Störungen mit positiver Anwachsrate nicht enthält. Im Unterschied zu Malkus u. Veronis kommt es in dem vorliegenden Stabilitätskriterium nicht auf die absolute Größe des Wärmetransportes an, sondern darauf, daß er ein Maximum bezüglich benachbarter Lösungen annimmt, so daß mehrere Lösungen gleichzeitig stabil sein können. Da Malkus u. Veronis die Walzenlösung ohne Begründung als physikalisch unreal ansehen, kommen sie zu dem Ergebnis, daß die Strömungsform, welche quadratische Zellen ausbildet, die stabilste ist.

Zellularkonvektion bei allgemeineren Randbedingungen

Für die Lösung des Problems der Zellularkonvektion auf dem Wege der Entwicklung ist es wesentlich, daß die Randbedingungen nicht von x, y abhängen und daher die Separation der z -Abhängigkeit in niedrigster Ordnung zulassen. Von der speziellen Form der Randbedingungen ist aber der Lösungsweg nicht abhängig und es können daher alle Probleme mit Randbedingungen, die beliebig von z , nicht aber von x, y abhängen, in der gleichen Weise durch eine Entwicklung gelöst werden wie in den behandelten vier Fällen. Insbesondere ist nach den bisherigen Ergebnissen zu erwarten, daß die Stabilität der Walzen- oder der Sechsecklösung nicht von den Randbedingungen, sondern höchstens von ihrer Symmetrie bzw. Unsymmetrie abhängt. Ein Beispiel für allgemeinere Randbedingungen ist der Fall, daß die Wärmeleitfähigkeit in dem angrenzenden Medium nicht unendlich groß ist, sondern sich um den Faktor ξ^{-1} von dem Wert in der Konvektionsschicht unterscheidet. Da die Gleichungen homogen sind, wird durch die Randbedingung

$$\xi \frac{\partial_z \vartheta}{\vartheta} = \frac{\partial_z \vartheta'}{\vartheta'} \quad \text{für } z = \pm \frac{1}{2}$$

die Kontinuität des Wärmestroms an den Grenzflächen erfüllt. Für die durch Konvektion eintretende Temperaturänderung ϑ' in dem Gebiet $\{z \geq \frac{1}{2}, z \leq -\frac{1}{2}\}$ ist die Gleichung $\Delta \vartheta' = 0$ zu lösen mit der Bedingung $\vartheta' = 0$ für $z = \pm \infty$. Der Separationsansatz führt unabhängig von den Randbedingungen zu Lösungen mit der gleichen x, y -Abhängigkeit wie in den bisherigen Fällen:

$$\vartheta_c = \delta_c w(x, y) f(z), \quad \vartheta = \Delta \Delta w(x, y) f(z), \quad \vartheta' = e^{-a|z \pm \frac{1}{2}|} \Delta \Delta w(x, y) f(z) \Big|_{z = \pm \frac{1}{2}}$$

Die z -Abhängigkeit $f(z)$ und die Werte von R und a lassen sich als Lösung der Gleichung $(\partial_{zz}^2 - a^2)^3 f(z) = -R a^2 f(z)$ mit den Randbedingungen z.B. im Fall "fest-fest" $f(\pm \frac{1}{2}) = f'(\pm \frac{1}{2}) = (\partial_{zz}^2 - a^2)^2 (a + \xi \partial_z) f(\pm \frac{1}{2}) = 0$ nach dem gleichen Verfahren berechnen, wie es Pellew & Southwell in dem speziellen Fall $\xi = 0$ durchgeführt haben. Die Entwicklung des stationären Gleichungssystems und die Stabilitätsrechnung werden keine neuen Ergebnisse liefern, sondern nur quantitative Änderungen von der relativen Ordnung ξ ergeben.

Anhang

a) Die Abschätzung der Eigenwerte $\overset{20}{G}_\tau$

Die Gleichung, durch welche die bisher nicht berechneten Eigenwerte der Sechsecklösung $\overset{20}{G}_\tau$ bestimmt werden, lautet

$$(90) \quad M \overset{20}{G}_\tau = -\frac{2}{3} \left(L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + L\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right)_m - \frac{1}{6} \left(L(1,1) \right)_m + \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 \left(L(\varphi_{\alpha\tau}, \varphi_{\alpha\tau}) + L(-\varphi_{\alpha\tau}, -\varphi_{\alpha\tau}) \right)_m$$

Die übrigen Terme des allgemeinen Diagonalelementes der Matrix (39) heben sich auf, wenn sie nicht verschwinden. Mit der Abkürzung $L(\varphi_{\alpha\tau}) = \left(L(\varphi_{\alpha\tau}, \varphi_{\alpha\tau}) + L(-\varphi_{\alpha\tau}, -\varphi_{\alpha\tau}) \right)_m$ läßt sich die Summe in (90) durch

$$(91) \quad L(\omega\psi_\tau) + L(\omega(\frac{\pi}{3}-\psi_\tau)) + L(\omega(\frac{\pi}{3}+\psi_\tau))$$

ersetzen, wobei ψ_τ der Winkel zwischen $\mathcal{R}_\tau$ und einem der Vektoren $\mathcal{R}_\alpha$ ist und zwischen 0 und $\frac{\pi}{6}$ variiert. Die Abhängigkeit von $\varphi_{\alpha\tau}$ der Funktion $L(\varphi_{\alpha\tau}) = L_0(\varphi_{\alpha\tau}) + L_1(\varphi_{\alpha\tau})p_0 + L_2(\varphi_{\alpha\tau})p_0^2$ ist auf der folgenden Seite dargestellt. Im Fall "fest-frei" wurde die Abhängigkeit von p_0 nicht berechnet und die Kurve $L(\varphi_{\alpha\tau})$ hat wegen der Orthogonalitätsrelation an der Stelle $\varphi_{\alpha\tau} = \frac{1}{2}$ eine Unstetigkeit. Da $L_0(\omega\psi_\tau)$ für $0 \leq \psi_\tau \leq \frac{\pi}{2}$ monoton abnehmend und die Ableitung nach ψ_τ monoton zunehmend ist, sind $L_0(\omega\psi_\tau) + L_0(\omega(\frac{\pi}{3}-\psi_\tau))$ und damit auch der von p_0 nicht abhängige Teil von (91) monoton abnehmende Funktionen für $0 \leq \psi_\tau \leq \frac{\pi}{6}$. Bei $\psi_\tau = \frac{\pi}{6}$ nimmt daher $M \overset{20}{G}_\tau$ für $p_0 = 0$ seinen höchsten Wert an mit dem Betrag

$$(92) \quad \begin{array}{ll} -0,1700 \text{ N}^2 & \text{im Fall "frei-frei",} \\ -0,2136 \text{ N}^2 & \text{im Fall "frei-fest",} \\ -0,2338 \text{ N}^2 & \text{im Fall "fest-fest".} \end{array}$$

Bezüglich der in p_0 linearen und quadratischen Terme ist $L(\omega\psi_\tau)$ im Intervall $0 \leq \psi_\tau \leq \frac{\pi}{2}$ eine monoton zunehmende Funktion mit monoton abnehmender Ableitung. Daher ist der von p_0 abhängende Teil von (91) im Bereich $0 \leq \psi_\tau \leq \frac{\pi}{6}$ monoton anwachsend und wir erhalten als höchsten Wert für den von p_0 abhängenden Teil von $\overset{20}{G}_\tau$:

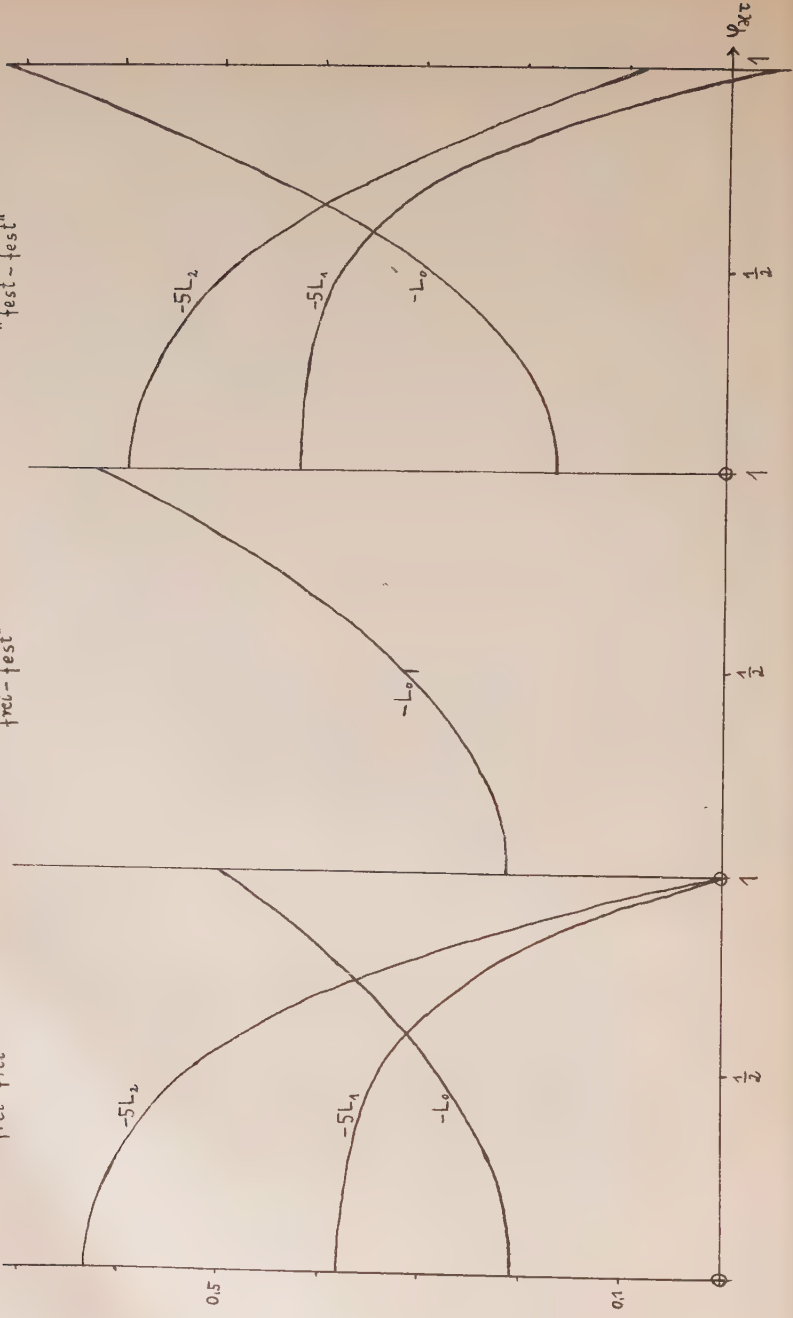
$$M \overset{20}{G}_\tau(p_0) = \frac{1}{6} \left(L_1(1,1)p_0 + L_2(1,1)p_0^2 \right)_m = \frac{1}{6} L_1(1)p_0 + \frac{1}{6} L_2(1)p_0^2$$

$$-L(\varphi_{xt})N^{-2} = -(L_0 + L_1\rho_0 + L_2\rho_0^2)N^{-2} \text{ in den Fällen}$$

"frei-frei"

"frei-fest"

"fest-fest"



Obwohl der in p_0 lineare Term im Fall "fest-fest" positiv ist, bleibt $\tilde{G}_T^{20}$ insgesamt negativ, wie man durch einsetzen des Wertes (92) als einer unteren Schranke feststellt.

b) Die Instabilität der Sechsecküberlagerung

Um die Eigenwerte $\tilde{G}^{20}$ für die Sechsecküberlagerung zu berechnen, gehen wir aus von der 12-reihigen Determinante (43) und ordnen Zeilen und Spalten so, daß die $\mathcal{K}$ -Vektoren der Orthogonalfunktionen zuerst die $\mathcal{K}$ -Vektoren der einen Sechsecklösung, dann die der überlagerten Sechsecklösung durchlaufen. Bezeichnen wir die 3-reihige Matrix mit nicht verschwindenden Nichtdiagonalelementen in (67) mit A und berücksichtigen die andere Normierung der Sechsecküberlagerung durch den Faktor $M_1 = 2M$ an der Stelle von M , so können wir die Bestimmungsgleichung der 12 interessierenden Eigenwerte in der folgenden Form schreiben:

$$(23 \text{ a, b}) \quad \begin{vmatrix} A & B & 0 \\ B & A & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{G}^{20} M_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} A-B & 0 & 0 \\ 0 & A+B & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{G}^{20} M_1 \end{vmatrix} = 0$$

Die daneben stehende vereinfachte Form ergibt sich durch die Ausnutzung der Symmetrie der Determinante. Die Matrix B hat die Form

$$B = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 & b_1 \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{3} L_0 - \frac{1}{3} L(\cos \psi) \\ b_2 &= \frac{1}{3} L_0 - \frac{1}{3} L(\cos(\frac{\pi}{3} + \psi)) \\ b_3 &= \frac{1}{3} L_0 - \frac{1}{3} L(\cos(\frac{\pi}{3} - \psi)) \end{aligned}$$

wobei ψ der Winkel zwischen zwei benachbarten $\mathcal{K}$ -Vektoren der beiden Sechsecklösungen ist. Wir erhalten folgende 12 Eigenwerte:

$$M_{G_1}^{20} = -L_0 - L_A - L_1 - \sum_{v=1}^3 b_v, \quad M_{G_{2,5}}^{20} = \frac{1}{2} (L_A - L_1 + \sqrt{6 \sum_v b_v^2 - 2 (\sum_v b_v)^2})$$

$$M_{G_4}^{20} = -L_0 - L_A - L_1 + \sum_{v=1}^3 b_v = -M_{G_7}^{20}, \quad M_{G_{3,6}}^{20} = \frac{1}{2} (L_A - L_1 - \sqrt{6 \sum_v b_v^2 - 2 (\sum_v b_v)^2})$$

$$M_{G_{7,10},12}^{20} = 0$$

Die Beziehung $G_4 = G_7$ gilt für $\Psi = \Psi_7$, wie der Vergleich mit (90) zeigt.

Der der Determinante (93a) entsprechende Faktor der Säkulardeterminante der Ordnung $(\varepsilon^2 \zeta^4)$ hat die Form

$$\begin{vmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix} = 0, \quad C = \begin{pmatrix} \ddot{G}M - \ddot{R}N & \frac{P}{\sqrt{2}} & \frac{P}{\sqrt{2}} \\ \frac{P}{\sqrt{2}} & \ddot{G}M - \ddot{R}N & \frac{P}{\sqrt{2}} \\ \frac{P}{\sqrt{2}} & \frac{P}{\sqrt{2}} & \ddot{G}M - \ddot{R}N \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \ddot{G}M - \ddot{R}N & -\frac{P}{\sqrt{2}} & -\frac{P}{\sqrt{2}} \\ -\frac{P}{\sqrt{2}} & \ddot{G}M - \ddot{R}N & -\frac{P}{\sqrt{2}} \\ -\frac{P}{\sqrt{2}} & -\frac{P}{\sqrt{2}} & \ddot{G}M - \ddot{R}N \end{pmatrix}$$

welche bei der zu (93b) führenden Umformung nicht geändert wird. Als Nullstellen der Determinante erhalten wir die Eigenwerte

$$M_{G_{4,11}}^{\ddot{G}} = \ddot{R}N - \sqrt{2}P, \quad M_{G_{7,10}}^{\ddot{G}} = \ddot{R}N + \sqrt{2}P$$

$$M_{G_{2,3,5,6}}^{\ddot{G}} = \ddot{R}N + \frac{P}{\sqrt{2}}, \quad M_{G_{8,9,11,12}}^{\ddot{G}} = \ddot{R}N - \frac{P}{\sqrt{2}}$$

Beim Einsetzen dieser Eigenwerte in die zugehörigen Anwachsraten müssen wir beachten, daß die beiden überlagerten Sechsecklösungen ein verschiedenes Vorzeichen der Amplitude haben können. In diesem Fall ist allerdings $\varepsilon \ddot{R} = 0$ und bei beliebigem Vorzeichen von P wird eine der beiden Anwachsraten

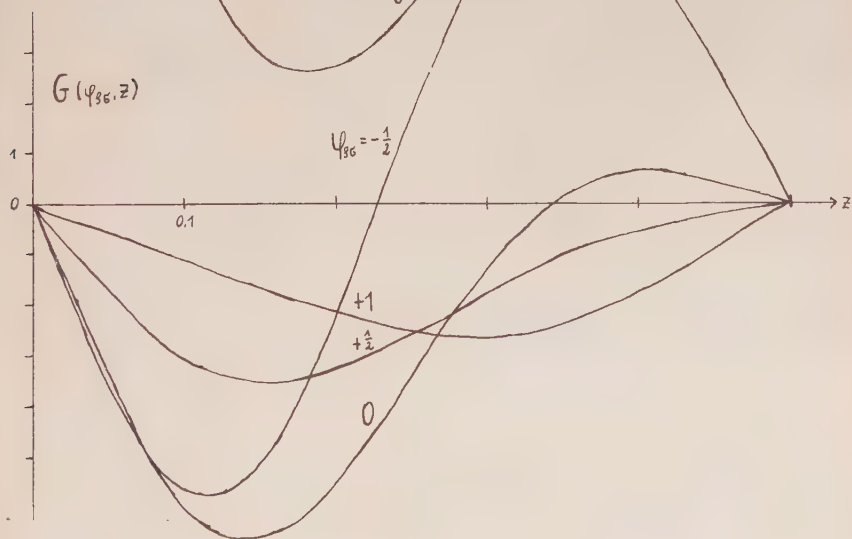
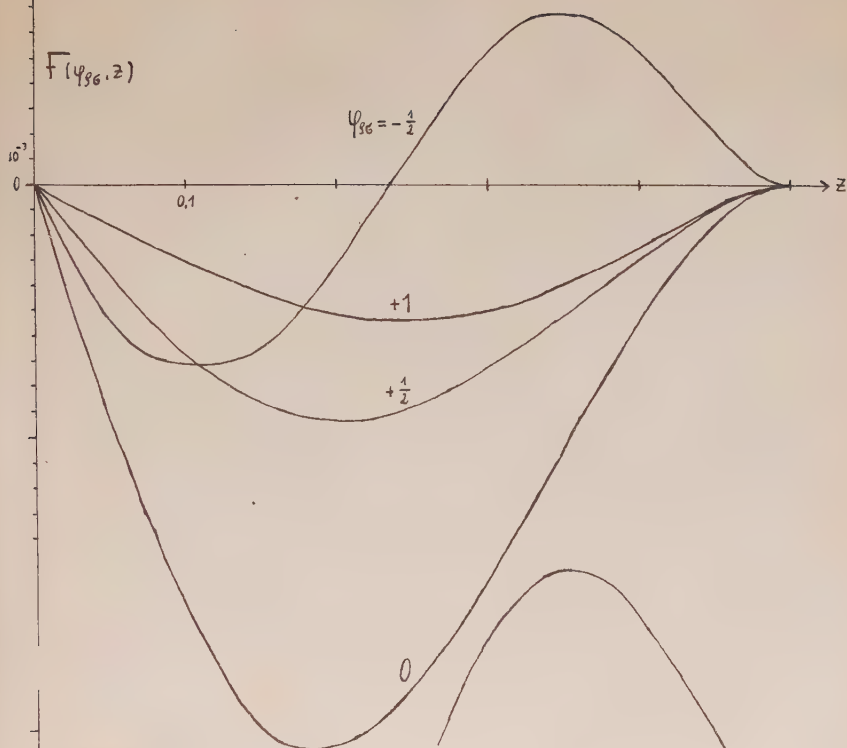
$$M_{G_7} = \varepsilon \sqrt{2}P, \quad M_{G_8} = -\varepsilon \frac{P}{\sqrt{2}}$$

positiv. Bei gleichem Vorzeichen der Amplitude wird $\ddot{R}N = \frac{P}{\sqrt{2}}$ und eine der beiden Anwachsraten

$$M_{G_5} = \varepsilon \sqrt{2}P + \varepsilon^2 \frac{1}{2} (L_A - L_1 + \sqrt{6 \sum_v b_v^2 - 2 (\sum_v b_v)^2}), \quad M_{G_4} = -\varepsilon \frac{P}{\sqrt{2}} - \varepsilon^2 M_{G_7}^{20}$$

wird positiv, womit die Instabilität der Sechsecküberlagerung bewiesen ist.

Anhang c)



Zusammenfassung

Zur Beantwortung der Frage, welche der möglichen stationären Strömungen in einer von unten erwärmten Konvektionsschicht stabil ist, hat es sich als notwendig erwiesen, die Temperaturabhängigkeit aller Materialeigenschaften in den hydrodynamischen Gleichungen zu berücksichtigen. Die betrachtete Entwicklung ergibt, daß bei kleinen Amplituden nur die Walzenlösung und die Sechsecklösung stabil sein können. Der Sechsecklösung entsprechen je nach dem Vorzeichen des Parameters ϵ zwei verschiedene Strömungsformen, die bei symmetrischen Randbedingungen durch Spiegelung an der Mittelebene der Schicht auseinander hervorgehen. Bei der Walzenlösung dagegen führt ein Wechsel des Vorzeichens und die sich daraus ergebende Spiegelung zur gleichen, nur verschobenen Strömungsform. Diesen Eigenschaften entsprechen die Bedingungen für die Stabilität der beiden Lösungen: Infolge der temperaturbedingten Inhomogenität der Schicht ist bei hinreichend kleinen Amplituden stets die in sechseckigen Zellen strömende Konvektion stabil. Sie wird bei symmetrischen Randbedingungen mit wachsender Rayleighzahl von der walzenförmigen Konvektion abgelöst. Die Unsymmetrie der Randbedingungen trägt dagegen bei höheren Amplituden zur Stabilität der Sechseckzellen bei. Die Ableitung der Stabilitätsgleichungen aus einem Extremalproblem zeigt, daß die stabile Strömung bei gegebener Rayleighzahl eine maximale Amplitude besitzt. Soweit experimentelle Ergebnisse vorliegen, stehen sie in Einklang mit der theoretischen Beschreibung.

Herrn Prof. Dr. A. Schlüter bin ich sehr dankbar für die Anregung zu dieser Arbeit und das lebhafte Interesse, mit dem er viel zur Förderung der Arbeit beigetragen hat. Herrn Dr. D. Lortz danke ich für Hilfe bei der numerischen Rechnung und für zahlreiche Diskussionen.

L i t e r a t u r

1. Benard, H. 1901 Ann. de Chim. et de Phys. 7. Serie 23, 62.
2. Pellew, A. & Southwell, R.V. 1940 Proc.Roy.Soc.A, 176, 312.
3. Malkus, W.V.R. 1954 Proc.Roy.Soc. A, 225, 185.
4. Malkus, W.V.R. & Veronis, G. 1958 J.Fluid Mech. 4, 225.
5. Schmidt, R.J. & Milverton, S.W. 1935 Proc.Roy.Soc.A, 152, 586.
6. Siedentopf, H. 1948 Naturwiss. Rdsch. 3, 107.
7. Reid, W.H. & Harris D.L. 1958 Phys. Fluids, 1, 102.
8. Lortz, D. Dissertation 1961, Univ. München.
9. v. Tippelskirch, H. 1956 Beitr.Phys.Atmos. 29, 37.
10. v. Tippelskirch, H. 1957 Beitr.Phys.Atmos. 29, 219.
11. Silveston, P.L. Dissertation 1955, T.H. München und
Forsch.Ing.Wes. 24, 29-32, 59-69 (1958)

Lebenslauf

Am 30. September 1936 wurde ich in Berlin geboren. Etwa ein Jahr später zogen meine Eltern, Dr. iur. Martin Busse und Erika Busse geb. Hügemeier gen. Winter, nach Kiel, wo mein Vater eine Professur an der Universität innehatte. Im Frühjahr 1941 folgte mein Vater einem Ruf an die Universität Göttingen. In Kiel und in Göttingen, wo meine Familie seit dieser Zeit wohnt, wurden meine vier jüngeren Geschwister geboren. Im Februar 1945 fiel mein Vater an der Westfront. Nachdem ich 1942 in die Volksschule eingeschult worden war, kam ich 1946 auf das humanistische Max-Planck-Gymnasium in Göttingen. Im Frühjahr 1956 verließ ich diese Schule mit dem Reifezeugnis und begann im Sommersemester 1956 an der Universität Göttingen das Studium der Physik. Fünf Semester später legte ich in diesem Fach das Diplomvorexamen ab. Im Wintersemester 1958/59 setzte ich mein Studium an der Universität München fort und schloß es am Ende des Wintersemesters 1960/61 mit dem Diplomexamen im Fach Physik ab. Herrn Prof. Dr. A. Schlüter, unter dessen Anleitung ich die Diplomarbeit anfertigte, verdanke ich es, daß ich seit einiger Zeit mit der Verwaltung einer Assistentenstelle beauftragt bin. Das Thema meiner Diplomarbeit habe ich nach dem Examen weiterbearbeitet und ich lege nun die Ergebnisse in der Dissertation vor.

Friedrich Busse

